

N° D'ORDRE

1496.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. J. TROUSSET,

Ancien Élève de l'École Normale supérieure,
Agréé des Sciences mathématiques.

1^{re} THÈSE. — ÉTUDE SEMI-ANALYTIQUE DU MOUVEMENT DU HUITIÈME SATELLITE
DE JUPITER.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 22 avril 1913 devant la Commission d'Examen.

MM. P. APPELL, *Président.*
H. ANDOYER, *Examineurs.*
PUISEUX,

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1913

N° D'ORDRE

1496.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

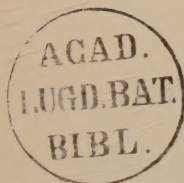
PAR M. J. TROUSSET,

Ancien Élève de l'École Normale supérieure,
Agrégré des Sciences mathématiques.

1^{re} THÈSE. — ÉTUDE SEMI-ANALYTIQUE DU MOUVEMENT DU HUITIÈME SATELLITE
DE JUPITER.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 22 avril 1913 devant la Commission d'Examen.



MM. P. APPELL, *Président.*

H. ANDOYER, } *Examineurs.*
PUISEUX, }

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1913

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

MM.

Doyen.....	P. APPELL, professeur.	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
Doyen honoraire.....	G. DARBOUX.....	Géométrie supérieure.
Professeurs honoraires...	CH. WOLF. RIBAN.	
	LIPPMANN.....	Physique.
	BOUTY.....	Physique.
	BOUSSINESQ.....	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	PICARD.....	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	YVES DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie compar.
	GASTON BONNIER.....	Botanique.
	DASTRE.....	Physiologie.
	KOENIGS.....	Mécanique physique et expérimentale.
	VELAIN.....	Géographie physique.
	GOURSAT.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	HALLER.....	Chimie organique.
	JOANNIS.....	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	P. JANET.....	Physique (Enseignement P. C. N.).
	WALLERANT.....	Minéralogie.
	ANDOYER.....	Astronomie.
	PAINLEVÉ.....	Mécanique rationnelle.
Professeurs.....	H AUG.....	Géologie.
	HOUSSAY.....	Zoologie.
	H. LE CHATELIER...	Chimie.
	GABRIEL BERTRAND...	Chimie biologique.
	M ^{me} P. CURIE.....	Physique générale.
	CAULLERY.....	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ.....	Chimie appliquée.
	G. URBAIN.....	Chimie.
	EMILE BOREL.....	Théorie des fonctions.
	MARCHIS.....	Aviation.
	JEAN PERRIN.....	Chimie physique.
	G. PRUVOT.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie compar.
	MATRUCHOT.....	Botanique.
	ABRAHAM.....	Physique.
	CARTAN.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CL. GUICHARD.....	Mathématiques générales.
	N.....	Application de l'Analyse à la Géométrie.
	N.....	Histologie.
	PUISEUX.....	Mécanique et Astronomie.
	LEDUC.....	Physique.
	MICHEL.....	Minéralogie.
	HÉROUARD.....	Zoologie.
	LÉON BERTRAND.....	Géologie.
Professeurs adjoints.....	RÉMY PERRIER.....	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	MOLLIARD.....	Physiologie végétale.
	COTTON.....	Physique.
	LESPIEAU.....	Chimie.
	GENTIL.....	Pétrographie.
	SAGNAC.....	Physique (Enseignement P. C. N.).
	PEREZ.....	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Secrétaire.....	D. TOMBECK.	

A

MONSIEUR H. ANDOYER.

Respectueux hommage.

PREMIÈRE THÈSE.

ÉTUDE SEMI-ANALYTIQUE

DU

MOUVEMENT DU HUITIÈME SATELLITE DE JUPITER.

Le huitième satellite de Jupiter a été découvert photographiquement par Melotte à l'Observatoire de Greenwich, le 27 janvier 1908. Quelques jours plus tard, le 3 mars, M. Wolf le photographia à son tour à Heidelberg. On crut d'abord que c'était une petite planète et on le désigna par les lettres CJ.

La première orbite du huitième satellite de Jupiter fut calculée par M. Crommelin ⁽¹⁾. C'était une orbite circulaire; le mouvement était rétrograde et la distance à la planète était 0,213 en unités astronomiques.

Un peu plus tard, MM. Cowell et Crommelin ⁽²⁾ calculèrent une orbite plus exacte par quadratures mécaniques en se basant sur les observations de 1908. Ils admettaient le mouvement rétrograde et trouvèrent comme éléments osculateurs : une inclinaison de 31° sur le plan de l'orbite de Jupiter; une excentricité égale à $\frac{1}{3}$; le demi-grand axe était égal à 0,1702. Ces éléments, basés uniquement sur trois mois d'observations en 1908, représentèrent assez mal les observations de 1909. Aussi les auteurs reprirent-ils leurs calculs ⁽³⁾ par une méthode analogue à celle qu'ils

⁽¹⁾ A. C. D. CROMMELIN, *First approximation to the orbit of J. VIII = CJ* (*M. N.*, 68, 457).

⁽²⁾ P. H. COWELL et A. C. D. CROMMELIN, *The orbit of Jupiter's Eighth Satellite* (*M. N.*, 68, 576-581).

⁽³⁾ P. H. COWELL, A. C. D. CROMMELIN and C. DAVIDSON, *On the orbit of Jupiter's Eighth Satellite* (*M. N.*, 69, 421-431). — A. C. D. CROMMELIN, *The motion of Jupiter's Eighth Satellite from 1910 to 1916* (*M. N.*, 71, 50-62).

avaient employée pour la comète de Halley ; ces nouvelles positions calculées représentent les observations de 1908 et de 1909 à 2" près ; elles représentent très bien aussi celles de 1910 et 1912, mais différent de 15" des positions observées pour 1911. MM. Cowell, Crommelin et Davidson emploient comme masse de Jupiter le nombre $\frac{1}{1047,3}$; de la moyenne des positions obtenues de 1908 à 1916, M. Crommelin conclut que le nœud rétrograde de 3° par an ; que l'inclinaison varie de 28° à 34° et l'excentricité de 0,294 à 0,448 ; il n'indique pas le mouvement du périjove, qui apparaît sur le graphique du mouvement de VIII Jupiter comme très irrégulier.

Son grand éloignement de Jupiter, les valeurs considérables de son excentricité et de son inclinaison rendent très difficile la théorie analytique du mouvement de ce satellite. J'ai cru toutefois devoir la tenter, non avec l'espoir de représenter mieux les observations déjà faites que MM. Cowell, Crommelin et Davidson, mais plutôt pour en tirer un enseignement sur la puissance des méthodes en usage et quelques données sur l'allure générale du mouvement de VIII Jupiter, pendant un temps assez long.

Le présent Mémoire donne le développement analytique des coordonnées du satellite par rapport à la planète développées suivant les puissances des excentricités et de l'inclinaison. La différence entre mes résultats et ceux donnés par Delaunay, puis par M. Andoyer⁽¹⁾, et après lui par M. Caubet⁽²⁾ consiste en ce que les développements en puissances de m (rapport du moyen mouvement du Soleil autour de Jupiter à celui du huitième satellite) sont remplacés par de simples nombres : en effet, ces développements, destinés spécialement au cas de la Lune où $m = \frac{1}{14}$, ne sont plus suffisants dans celui qui m'occupe où $m = -\frac{1}{6}$ environ. Aussi ai-je repris directement les calculs en donnant dès le début à m une valeur numérique.

C'est la méthode qu'ont les premiers employée pour la Lune MM. G.-W. Hill⁽³⁾ et E.-W. Brown⁽⁴⁾, à cause du peu de convergence des séries suivant les puissances de m .

(¹) *Bulletin astronomique*, t. XVIII, p. 177 ; t. XIX, p. 401 ; t. XXIV, p. 395.

(²) *Annales de l'Observatoire de Toulouse*, t. VI.

(³) *Researches in the lunar theory* (*American Journal of Mathematics*, t. I).

(⁴) *Theory of the motion of the Moon* (*Mem. R. A. S.*).

Les seuls développements analytiques que nous possédions d'une façon à peu près complète, en ce qui concerne les termes de degré supérieur à un par rapport à l'excentricité ou à l'inclinaison, sont ceux de Delaunay, vérifiés et complétés par M. Andoyer; et l'on sait combien, même pour la Lune, certains de ces développements semblent insuffisants (*voir* à ce sujet le Tome III de la *Mécanique céleste* de Tisserand). Dans le cas du huitième satellite de Jupiter, c'est presque dès le début qu'on rencontre des séries dont les termes décroissent à peine. Voici quelques exemples :

Le Tableau suivant donne les perturbations du rayon vecteur et de la longitude qui sont indépendantes de ε et de γ . Dans la première colonne, j'ai écrit les valeurs que j'ai calculées directement en donnant dès le début à m la valeur numérique $-0,172$; dans la deuxième, les valeurs obtenues en faisant $m' = \frac{m}{1-m} = -\frac{0,172}{1,172}$ dans les séries de M. Hill (même Mémoire); et dans la troisième les valeurs obtenues en faisant $m = -0,172$ dans les séries de Delaunay. Ces séries ont d'ailleurs été toutes vérifiées ou corrigées par M. Andoyer :

	Direct.	Hill.	Delaunay.
$M_{0,0} \dots$	$+0,000390$	$+0,000386$	$+0,000352$
$M_{0,2} \dots$	$-0,009061$	$-0,009060$	$-0,009059$
$L_{0,2} \dots$	$+0,011765$	$+0,011768$	$+0,011762$
$M_{0,4} \dots$	$-0,000099$	$-0,000098$	$-0,000114$
$L_{0,4} \dots$	$+0,000120$	$+0,000118$	$+0,000142$
$M_{0,6} \dots$	$-0,000001$	$-0,000001$	$+0,000004$
$L_{0,6} \dots$	$+0,000002$	$+0,000001$	$-0,000005$

Le calcul direct est donc en accord parfait avec les séries de Hill et en accord encore très satisfaisant avec celles de Delaunay, dont les termes décroissent d'ailleurs assez vite.

Considérons maintenant le coefficient g_0 , c'est-à-dire la partie du mouvement du périjove qui ne dépend pas des excentricités et de l'inclinaison.

Je trouve, par le calcul direct, $+0,002683$. La meilleure série de Hill (*Annals of Mathematics*, t. IX) qui contient les puissances de $m'' = \frac{m}{1-\frac{7}{4}m}$ jusqu'à la puissance onzième, donne $+0,002684$.

Quant à la série de Delaunay, qui va jusqu'à m^9 , voici quels en sont les termes successifs :

$$+0,0222 - 0,0358 + 0,0278 - 0,0195 + 0,0135 - 0,0096 + 0,0072 - 0,0058;$$

le total de ces huit termes est 0,0000; mais si l'on ajoute un *complément probable* en considérant la série comme une progression géométrique, on trouve + 0,0023 qui s'approche beaucoup de la valeur exacte.

Nous n'avons plus pour la suite que les séries de Delaunay (1). La série donnée par M. Andoyer pour le coefficient $\mu_{0,1}^{(+1)}$ devient, si l'on y fait $m = -0,172$,

$$-0,5 + 0,0111 - 0,0137 + 0,0110 - 0,0082 + 0,0058 - 0,0044,$$

dont le total est - 0,4984; en tenant compte des différences de notation, j'en conclus pour la quantité que j'ai appelée $M_{1,0}$ la valeur + 1,004, alors que dans mon calcul $M_{1,0} = +1$. En tenant compte du *complément probable*, il vient $\mu_{0,1}^{(+1)} = -0,4966$ et $M_{1,0} = +1,0005$.

Voici encore les comparaisons pour deux termes du second degré, coefficients de ε_1^2 . D'après la série de Delaunay

$$\lambda_{0,2}^{(+2)} = +0,625 - 0,00647 + 0,02578 - 0,02407 + 0,02321 - 0,02021 + 0,01761,$$

c'est-à-dire avec mes notations $L_{3,0} = +2,6012$; en tenant compte du *complément probable*, on trouve + 2,562 et par le calcul direct + 2,568.

De même

$$\mu_{0,2}^{(+2)} = -0,3750 + 0,0092 - 0,0261 + 0,0234 - 0,0210 + 0,0170 - 0,0141,$$

c'est-à-dire $M_{3,0} = -1,569$; avec *complément probable* $M_{3,0} = -1,544$; le calcul direct donne - 1,542.

Il est inutile de multiplier ces exemples qui suffisent à montrer combien les développements en séries donneraient ici des résultats incertains. D'ailleurs, j'avais besoin de termes du troisième et du quatrième degré que MM. Andoyer et Caubet n'ont pas encore vérifiés.

Aussi ai-je repris tous les calculs, par la méthode de M. Andoyer qui est parfaitement adaptée aux calculs numériques.

(1) M. Brendel a aussi donné le développement des inégalités du premier degré dans sa *Theorie des Mondes* (*Astron. Mittheilungen der Königl. Sternwarte zu Göttingen*, Achter Teil). Ses développements sont, pour ces termes, poussés à peu près aussi loin que ceux de M. Andoyer. Mais ses variables étant celles de Gylden, la différence des notations m'a empêché de faire facilement une comparaison directe avec mes résultats.

Dans la seconde Partie de mon travail, je cherche à déterminer les éléments moyens de l'orbite en comparant les résultats de mon calcul à ceux obtenus par MM. Cowell, Crommelin et Davidson, c'est-à-dire aux observations.

M. Andoyer, après m'avoir indiqué ce sujet de travail, m'a donné toutes les indications et tous les conseils nécessaires pour me faire comprendre à fond ses méthodes; il m'a communiqué et expliqué ses dernières Notes, non encore publiées, qui contiennent un certain nombre de perfectionnements et de simplifications par rapport à ses publications du *Bulletin astronomique*. Je lui en suis profondément reconnaissant et je tiens à lui exprimer toute ma gratitude pour l'intérêt qu'il n'a cessé de porter à mon travail.

Je dois aussi remercier MM. B. Baillaud, directeur de l'Observatoire de Paris, et Luc Picart, directeur de l'Observatoire de Bordeaux, qui m'ont constamment encouragé et conseillé.

CHAPITRE I.

EXPOSÉ DE LA MÉTHODE.

Nous pouvons évidemment négliger la masse du satellite.

Soient :

U , la fonction des forces;

x, y, z , les coordonnées du satellite par rapport à des axes rectangulaires qui ont pour origine le centre de Jupiter et conservent des directions fixes dans l'espace; nous prendrons pour plan des xy le plan de l'orbite de Jupiter supposée elliptique.

Soient encore n et a deux constantes arbitraires qui joueront le rôle du moyen mouvement et du grand axe de l'orbite du satellite et sont liées par la relation

$$n^2 a^3 = f M_0,$$

où f est le coefficient d'attraction, M_0 la masse de Jupiter, et ω une nouvelle constante arbitraire.

Posons

$$N = nt + \omega,$$

t représentant le temps,

$$\xi = \frac{x + iy}{a} e^{-iN}, \quad \eta = \frac{x - iy}{a} e^{iN}, \quad \zeta = \frac{z}{a};$$

d'où, inversement,

$$x = \frac{a}{2} (\xi e^{iN} + \eta e^{-iN}), \quad y = \frac{a}{2i} (\xi e^{iN} - \eta e^{-iN}), \quad z = a\zeta,$$

de telle sorte que $a \frac{\xi + \eta}{2}$, $a \frac{\xi - \eta}{2}$ et $a\zeta$ sont les coordonnées par rapport à des axes animés d'un mouvement de rotation uniforme d'amplitude angulaire n autour de l'axe des z .

Désignons alors par $r = \rho a = ae^\mu$ le rayon vecteur du satellite, par $\nu = N + \lambda$ sa longitude; nous aurons entre ces diverses quantités les relations suivantes :

$$\xi = e^{\mu + i\lambda} \cos s, \quad \eta = e^{\mu - i\lambda} \cos s, \quad \zeta = e^\mu \sin s.$$

Soient, de même, $M' + \lambda'$ la longitude du Soleil, N' étant égal à $n't' + \omega'$, λ' périodique sans partie constante; $r' = a'\rho'$ son rayon vecteur de telle sorte que $f = n'^2 a'^3$ en prenant pour unité de masse celle du Soleil; posons enfin

$$K = N - N', \quad \sigma = e^{iK}, \quad \frac{n'}{n} = m, \quad \frac{a'}{a} = \alpha;$$

les équations du mouvement sont, en désignant par ξ' , ξ'' , ..., les dérivées par rapport à N , considérée comme variable indépendante,

$$\xi'' + 2i\xi' - \xi = 2 \frac{\partial F}{\partial \eta},$$

$$\eta'' - 2i\eta' - \eta = 2 \frac{\partial F}{\partial \xi},$$

$$\zeta'' = \frac{\partial F}{\partial \zeta},$$

avec

$$F = \frac{U}{n^2 a^2} = \frac{a}{r} + \frac{1}{4a^2} \frac{n'^2}{n^2} (r^2 - 3z^2) + \Phi,$$

et

$$\begin{aligned} \Phi = m^2(\rho'^{-3} - 1) & \left(\frac{1}{4} \xi \eta - \frac{1}{2} \xi^2 \right) + m^2 \rho'^{-3} \left(\frac{3}{8} \xi^2 \sigma^2 e^{-2i\lambda'} + \frac{3}{8} \eta^2 \sigma^{-2} e^{2i\lambda'} \right) \\ & + \alpha m^2 \rho'^{-3} \left[\left(\frac{3}{16} \xi^2 \eta - \frac{3}{4} \xi \eta^2 \right) \sigma e^{i\lambda'} + \left(\frac{3}{16} \xi \eta^2 - \frac{3}{4} \eta \xi^2 \right) \sigma^{-1} e^{i\lambda'} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{5}{16} \xi^3 \sigma^3 e^{-3i\lambda'} + \frac{5}{16} \eta^3 \sigma^{-3} e^{3i\lambda'} \right) \right] \\ & + \dots \end{aligned}$$

de telle sorte que tous les termes de Φ contiennent en facteur σ , ou la parallaxe α ou l'excentricité de l'orbite de Jupiter ϵ' .

Les équations s'écrivent encore

$$\begin{aligned} -\xi'' - 2i\xi' + \xi \left(1 + \frac{m^2}{2} \right) - \frac{\xi}{\rho^3} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} &= 0, \\ -\eta'' + 2i\eta' + \eta \left(1 + \frac{m^2}{2} \right) - \frac{\eta}{\rho^3} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} &= 0, \\ -\zeta'' - m^2 \zeta - \frac{\zeta}{\rho^3} + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} &= 0, \end{aligned}$$

et l'équation de Laplace s'écrit

$$-\frac{1}{2}(\rho^2)'' + \frac{1}{\rho} + m^2(\rho^2 - 3\xi^2) + 2\Phi + \Phi_1 - 2m \int \frac{\partial \Phi}{\partial N'} dN = 0,$$

où

$$\Phi_1 = \xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}.$$

Si nous cherchons maintenant une solution indépendante de tout paramètre ϵ , ϵ' , γ , α et même de σ , nous trouvons

$$\zeta = 0, \quad \xi = \eta = \rho = \left(1 + \frac{m^2}{2} \right)^{-\frac{1}{3}} = \omega^{-\frac{1}{3}},$$

en posant

$$\omega = 1 + \frac{m^2}{2}.$$

Nous poserons donc, pour simplifier les formules,

$$\begin{aligned} \mu &= -\frac{1}{3} \log \omega + M, & i\lambda &= L, & is &= S, \\ \xi &= \omega^{-\frac{1}{3}} A, & \eta &= \omega^{-\frac{1}{3}} A', & i\zeta &= \omega^{-\frac{1}{3}} A'', \\ \frac{\xi}{\rho^3} &= \omega^{\frac{2}{3}} H, & \frac{\eta}{\rho^3} &= \omega^{\frac{2}{3}} H', & \frac{i\zeta}{\rho^3} &= \omega^{\frac{2}{3}} H'', \\ \frac{1}{\rho} &= \omega^{\frac{1}{3}} P, & \rho^2 &= \omega^{-\frac{2}{3}} C. \end{aligned}$$

Toutes ces quantités sont liées par les relations

$$\begin{aligned} A &= e^{M+L} \operatorname{ch} S, & A' &= e^{M-L} \operatorname{ch} S, & A'' &= e^M \operatorname{sh} S, \\ H &= e^{-2M+L} \operatorname{ch} S, & H' &= e^{-2M-L} \operatorname{ch} S, & H'' &= e^{-2M} \operatorname{sh} S, \\ P &= e^{-M}, & C &= e^{2M}. \end{aligned}$$

Chacune d'elles est d'ailleurs développable suivant les puissances entières, positives, négatives ou nulles de σ et les puissances entières, positives ou nulles de

$$\begin{aligned} \varepsilon'_1 &= \varepsilon' e^{i(N' - \varpi')}, & \varepsilon'_2 &= \varepsilon' e^{-i(N' - \varpi')}, \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon e^{i(N-G)}, & \varepsilon_2 &= \varepsilon e^{-i(N-G)}, \\ \gamma_1 &= \gamma e^{i(N-H)}, & \gamma_2 &= \gamma e^{-i(N-H)}, \end{aligned}$$

si l'on pose

$$G = gN + \varpi, \quad H = hN + \theta;$$

ε' et ϖ' étant l'excentricité et la longitude du périjove de l'orbite solaire, ε , ϖ , γ , θ des constantes arbitraires qui joueront le rôle de l'excentricité, de la longitude du périjove, de l'inclinaison, de la longitude du nœud de l'orbite du satellite, g et h des constantes à déterminer développables suivant les puissances entières et positives de ε^2 et γ^2 .

Nous aurons, par exemple,

$$A = \Sigma A_p M_p, \quad A_p = \Sigma A_{p,k} \sigma^k,$$

en désignant par M_p le monome $\alpha^p \varepsilon_1^{r_1} \varepsilon_2^{r_2} \varepsilon_1^{r'_1} \varepsilon_2^{r'_2} \gamma_1^{s_1} \gamma_2^{s_2}$.

Si l'on met en évidence les premiers termes des développements, suivant les puissances de M , L , S , en posant

$$\begin{aligned} A &= 1 + M + L + B, & H &= 1 - 2M + L + K, \\ A' &= 1 + M - L + B', & H' &= 1 - 2M - L + K', \\ A'' &= S + B'', & H'' &= S + K'', \\ P &= 1 - M + Q, & C &= 1 + 2M + D, \end{aligned}$$

de telle sorte que B , B' , B'' , K , K' , K'' , Q , D soient du deuxième ordre par

rapport à M et L, les équations s'écrivent

$$\begin{aligned} 0 = & \Sigma A_{p,k} (f_{p,k}^2 + 2f_{p,k}) M_p \sigma^k + \left(1 + \frac{m^2}{2}\right) (3M + B - K) \\ & + \frac{m^2}{2} (\rho'^{-3} - 1) A + \frac{3}{2} m^2 \rho'^{-3} e^{2i\lambda'} \sigma^{-2} A' \\ & + \alpha m^2 \omega^{-\frac{1}{3}} \rho'^{-4} \left[\frac{3}{8} A^2 \sigma e^{-i\lambda'} + \left(\frac{3}{4} A A' + \frac{3}{2} A'^2 \right) \sigma^{-1} e^{i\lambda'} + \frac{15}{8} A'^2 \sigma^{-3} e^{3i\lambda'} \right] + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = & \Sigma A'_{p,k} (f_{p,k}^2 - 2f_{p,k}) + \left(1 + \frac{m^2}{2}\right) (3M + B' - K') \\ & + \frac{m^2}{2} (\rho'^{-3} - 1) A' + \frac{3}{2} m^2 \rho'^{-3} e^{-2i\lambda'} \sigma^2 A \\ & + \alpha m^2 \omega^{-\frac{1}{3}} \rho'^{-4} \left[\left(\frac{3}{4} A A' + \frac{3}{2} A'^2 \right) \sigma e^{-i\lambda'} + \frac{3}{8} A'^2 \sigma^{-1} e^{i\lambda'} + \frac{15}{8} A^2 \sigma^3 e^{-3i\lambda'} \right] + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = & \Sigma (A''_{p,k} f_{p,k}^2 M_p \sigma^k) - \left(1 + \frac{3}{2} m^2\right) A'' + \left(1 + \frac{m^2}{2}\right) (B'' - K'') - m^2 (\rho'^{-3} - 1) A'' \\ & - \alpha m^2 \omega^{-\frac{1}{3}} \rho'^{-4} \left(\frac{3}{2} A A'' \sigma e^{-i\lambda'} + \frac{3}{2} A' A'' \sigma^{-1} e^{i\lambda'} \right) + \dots, \end{aligned}$$

et l'équation de Laplace

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{1}{2} \Sigma f_{p,k}^2 (2M + D)_{p,k} M_p \sigma^k - \left(1 - \frac{3}{2} m^2\right) M + \left(1 + \frac{m^2}{2}\right) Q + m^2 (D + 3A'^2) \\ & + \Sigma M_p \sigma^k \left\{ m^2 (\rho'^{-3} - 1) (A A' + 2A'^2)_{p,k} \left[1 - \frac{m(r''_1 - r''_2)}{2f_{p,k}} \right] \right. \\ & + \frac{3}{2} m^2 (\rho'^{-3} e^{-2i\lambda'} A^2)_{p,k-2} \left(1 + m \frac{2 - r''_1 + r''_2}{2f_{p,k}} \right) \\ & + \frac{3}{2} m^2 (\rho'^{-3} e^{2i\lambda'} A'^2)_{p,k+2} \left(1 - m \frac{2 + r''_1 - r''_2}{2f_{p,k}} \right) \\ & + \frac{15}{16} \alpha m^2 \omega^{-\frac{1}{3}} \left[\rho'^{-4} e^{-i\lambda'} (A^2 A' + 4A A'^2)_{p,k-1} \right. \\ & \quad \left. \times \left(1 + 2m \frac{1 - r''_1 + r''_2}{5f_{p,k}} \right) \right] \\ & + \frac{15}{16} \alpha m^2 \omega^{-\frac{1}{3}} \left[\rho'^{-4} e^{i\lambda'} (A A'^2 + 4A' A'^2)_{p,k+1} \right. \\ & \quad \left. \times \left(1 - 2m \frac{1 + r''_1 - r''_2}{5f_{p,k}} \right) \right] \\ & + \frac{25}{16} \alpha m^2 \omega^{-\frac{1}{3}} (\rho'^{-4} e^{-3i\lambda'} A^3)_{p,k-3} \left(1 + 2m \frac{3 - r''_1 + r''_2}{5f_{p,k}} \right) \\ & \left. + \frac{25}{16} \alpha m^2 \omega^{-\frac{1}{3}} (\rho'^{-4} e^{3i\lambda'} A'^3)_{p,k+3} \left(1 - 2m \frac{3 + r''_1 - r''_2}{5f_{p,k}} \right) + \dots \right\}, \end{aligned}$$

T.

$f_{p,k}$ représente la dérivée par rapport à N du coefficient de i dans l'exponentielle qui figure dans $M_p \sigma^k$:

$$f_{p,k} = k(1-m) + (r_1 - r_2)(1-g) + (r'_1 - r'_2)m + (s_1 - s_2)(1-h),$$

r''_1 et r''_2 , les exposants de ε'_1 et ε'_2 qui figurent dans les coordonnées ρ' et λ' du Soleil.

Telle est la forme particulièrement simple que M. Andoyer a donnée aux équations du mouvement et qui permet de conduire les approximations successives avec sécurité.

La marche du calcul est la suivante : On détermine d'après les résultats des calculs antérieurs des valeurs approchées des $D, Q, B, B', K, K', A^2, A'^2, A''^2, \dots$ qui figurent dans l'équation de Laplace et dans les équations en A et A' , dans les coefficients d'un certain monome $M_p \sigma^k$. A l'aide de ces valeurs approchées, on calcule une valeur approchée de $M_{p,k}$.

Si l'on égale alors à zéro les coefficients de $M_p \sigma^k$ dans les deux équations en A et A' et qu'on y remplace $M_{p,k}, B_{p,k}, B'_{p,k}, K_{p,k}, K'_{p,k}, A_{p,k-2}, A'_{p,k+2}, \dots$ par leurs valeurs approchées, on calculera des valeurs approchées de $A_{p,k}$ et $A'_{p,k}$. On aura ensuite

$$L_{p,k} = (A - M - B)_{p,k},$$

et aussi

$$L_{p,k} = (-A' + M + B')_{p,k}.$$

Il faut trouver la même valeur pour L par ces deux formules. C'est là une très précieuse vérification. C'est aussi, dans le calcul numérique que j'ai fait, une indication sur la rapidité de la convergence des approximations successives, car il est difficile de voir *a priori* de quel ordre de grandeur numérique est l'erreur commise par suite des termes négligés.

Cette vérification est excellente. Il faut toutefois songer, qu'en dehors des cas, évidemment très invraisemblables, de plusieurs fautes de calcul se compensant fortuitement, il en est où une erreur sur l'un des termes calculés laisse intacte la vérification. C'est en particulier ce qui arrive lorsque $f_{p,k}$ est voisin de ± 1 . En effet supposons qu'on ait commis une erreur μ sur la valeur de $M_{p,k}$. L'erreur qui en résultera sur $A_{p,k}$ sera

$$- \mu \frac{3 \left(1 + \frac{m^2}{2} \right)}{f^2 + 2f},$$

et l'erreur qui en résultera sur $A'_{p,k}$ sera

$$- \mu \frac{3 \left(1 + \frac{m^2}{2} \right)}{f^2 - 2f},$$

l'erreur commise sur la première valeur calculée de L , que j'appellerai L_1 , sera donc

$$- \mu \left(3 \frac{1 + \frac{m^2}{2}}{f^2 - 2f} + 1 \right),$$

et l'erreur commise sur la seconde, L_2 ,

$$\mu \left(3 \frac{1 + \frac{m^2}{2}}{f^2 - 2f} + 1 \right),$$

ces deux erreurs sont égales si

$$f^2 = 1 - \frac{3m^2}{2}.$$

De même, si f est voisin de -1 , une erreur sur B entraîne une erreur sur A , mais en entraîne une très faible sur L , et par suite ne détruit pas la vérification.

Il faut remarquer que le cas où f^2 est voisin de $1 - \frac{3}{2}m^2$ est précisément celui où le coefficient de M dans l'équation de Laplace est petit. La nécessité où l'on se trouve ainsi de calculer avec une précision plus grande les autres termes de l'équation de Laplace pour compenser la petitesse du diviseur, s'aggrave donc de ce fait que la vérification perd de sa valeur; il faut ou pousser encore plus loin la précision du calcul ou le vérifier directement avec un soin particulier. Toutefois cet inconvénient a été pour moi bien atténué par suite du fait suivant : les petits diviseurs analytiques sont de l'ordre de m ou de m^2 ; mais la valeur numérique de m que j'ai introduite est tellement grande ($-0,172$) que m ou m^2 ne sont plus très petits. Il m'a suffi le plus souvent d'apporter un soin particulier au calcul des quantités auxiliaires, d'éviter par exemple les erreurs de une ou deux unités qu'une multiplication abrégée peut introduire dans le dernier chiffre d'un produit, pour me dispenser de reprendre avec des décimales supplémentaires des calculs antérieurs.

D'ailleurs j'ai vérifié tous mes produits de séries en faisant $\sigma^2 = 1$, dans le multiplicateur, le multiplicande et le produit. Dans le cas du produit d'une série symétrique gauche (coefficient de σ^{-k} égal au coefficient de σ^k changé de signe) par une série symétrique ou symétrique gauche, j'ai fait $\sigma^2 = +1,25$.

Enfin, j'ai fait le calcul des termes de degré 0, 1 ou 2 par rapport à ε et γ pour $m = -0,20$ et pour $m = -0,172$, et de leurs dérivées par rapport à m pour $m = -0,172$; les différences concordent très exactement avec les dérivées. Je crois donc n'avoir pas commis de fautes, au moins dans les termes importants.

Voici maintenant quelques exemples pour montrer la marche des calculs. Je les donne pour $m = -0,172$.

Les premiers termes à calculer sont ceux qui sont indépendants de ε , ε' , γ , α et ne dépendent que de σ . Si l'on désigne par M_0 le monome 1, les équations s'écrivent

$$f_{0,k} = k(1-m),$$

$$M_{0,k} \left(f_{0,k}^2 - 1 + \frac{3}{2} m^2 \right) + \left(1 + \frac{m^2}{2} \right) Q_{0,k} + \left[\frac{k^2}{2} (1-m)^2 + m^2 \right] D_{0,k} \\ + \frac{3}{2} m^2 \left(1 + \frac{m}{f_{0,k}} \right) (A^2)_{0,k-2} + \frac{3}{2} m^2 \left(1 - \frac{m}{f_{0,k}} \right) (A'^2)_{0,k+2} = 0,$$

$$(f_{0,k}^2 + 2f_{0,k}) A_{0,k} + \left(1 + \frac{m^2}{2} \right) (3M + B - K)_{0,k} + \frac{3}{2} m^2 A'_{0,k+2} = 0,$$

$$(f_{0,k}^2 - 2f_{0,k}) A'_{0,k} + \left(1 + \frac{m^2}{2} \right) (3M + B' - K')_{0,k} + \frac{3}{2} m^2 A_{0,k-2} = 0.$$

On fait d'abord $k = 2$ en prenant comme première approximation

$$(A^2)_{0,k-2} = 1, \quad A_{0,k-2} = 1;$$

ce qui donne, pour $m = -0,172$,

$$M_{0,2} = -0,00906,$$

$$A_{0,2} = +0,00271,$$

$$A'_{0,2} = -0,02084,$$

$$L_{0,2} = +0,01177 \quad \text{et} \quad +0,01178.$$

On fait alors $k=0$ et $k=4$, et il faut calculer $Q_{0,0}$, $D_{0,0}$, ..., $Q_{0,4}$, $D_{0,4}$, Par exemple,

$$B = \frac{(M+L)^2}{2} + \frac{(M+L)^3}{6} + \dots$$

Nous ne pouvons remplacer jusqu'ici M et L que par $M_{0,2}\sigma^2 + M_{0,-2}\sigma^{-2}$ et $L_{0,2}\sigma^2 + L_{0,-2}\sigma^{-2}$.

Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} Q_0 &= +0,000\,082, & D_0 &= +0,000\,328, \\ B_0 &= -0,000\,056, & K_0 &= +0,000\,190. \end{aligned}$$

D'ailleurs, l'équation de Laplace est inemployable pour $k=0$, car elle résulte d'une intégration qui introduit une constante arbitraire. Mais, dans l'équation en A , $A_{0,0}$ disparaît, et l'on tire de cette équation

$$M_{0,0} = +0,000\,386.$$

Comme $L_{0,0}$ doit être nul, on a

$$+1 = A_{0,0} - M_{0,0} - B_{0,0},$$

d'où

$$A_{0,0} = +1,000\,330.$$

$M_{0,4}$ se calcule à l'aide de l'équation de Laplace et il vient

$$M_{0,4} = -0,000\,099, \quad A_{0,4} = +0,000\,025, \quad A'_{0,4} = -0,000\,002, \quad L_{0,4} = +0,000\,120.$$

Il faut alors revenir à $k=2$ et calculer pour $k=6$ en tenant compte des termes constants et des termes en σ^4 dans le calcul de $Q_{0,2}$, ...; il vient

$$\begin{aligned} M_{0,2} &= -0,009\,061, & A_{0,2} &= +0,002\,706, & A'_{0,2} &= -0,020\,835, & L_{0,2} &= +0,011\,766, \\ M_{0,6} &= -0,000\,001, & A_{0,6} &= 0,000\,000, & A'_{0,6} &= 0,000\,000, & L_{0,6} &= +0,000\,002. \end{aligned}$$

Le calcul des termes de degré 0 est terminé au degré d'approximation que je me suis proposé.

Voici, rapidement calculées, les valeurs qu'on obtiendrait en faisant

$$m = 0,172$$

dans les développements analytiques

$$\begin{aligned} M_{0,0} &= +0,000350, & A_{0,0} &= +1,000334, \\ M_{0,2} &= -0,009059, & A_{0,2} &= +0,002704, & A'_{0,2} &= -0,020837, & L_{0,2} &= +0,011762, \\ M_{0,4} &= -0,000115, & A_{0,4} &= +0,000028, & A'_{0,4} &= +0,000006, & L_{0,4} &= +0,000142, \\ M_{0,6} &= +0,000004; & A_{0,6} &= -0,000001; & A'_{0,6} &= -0,000001; & L_{0,6} &= -0,000005. \end{aligned}$$

Ensuite, le calcul se modifie un peu, en ce sens qu'on n'a plus à tenir compte des puissances secondes ou d'ordre supérieur dans le calcul des Q, D, Il comprend deux parties : le calcul des termes préliminaires et la formation des approximations successives; à mesure qu'on avance, la première, qui consiste essentiellement en produits de séries, se complique; la seconde se simplifie, au contraire, du fait qu'il y a moins de chiffres à calculer.

Voici, par exemple, le calcul des termes en $\gamma_1^2 \varepsilon_2$, qui présente quelque difficulté.

B s'obtient de la façon suivante :

$$A = e^{M+L} \text{ch } S$$

s'écrit en développant

$$1 + M + L + B = A_0 e^{\varepsilon_2(M+L)_2 + \gamma_1^2(M+L)_{23} + \varepsilon_2 \gamma_1^2(M+L)_{70} + \dots} \left(1 + \frac{S^2}{2} + \dots \right),$$

d'où, en égalant les coefficients de $\gamma_1^2 \varepsilon_2$,

$$B_{70} = (A_0 - 1)(M + L)_{70} + A_0 \left[(M + L)_2(M + L)_{23} + (M + L)_2 \frac{1}{2} S_{21}^2 + S_{21} S_{42} \right],$$

si l'indice 2 correspond à ε_2 ;

$$\begin{aligned} \gg \quad 21 & \quad \gg \quad \gamma_1; \\ \gg \quad 23 & \quad \gg \quad \gamma_1^2; \\ \gg \quad 42 & \quad \gg \quad \gamma_1 \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Je mets B_{70} sous la forme

$$B_{70} = \beta_{70} + (A_0 - 1)[M_{70} + L_{70} + \beta_{70}]$$

en appelant β_{70} la quantité entre crochets dans l'expression développée de B_{70} . On trouverait de même

$$D_{70} = \delta_{70} + (C_0 - 1)(2M_{70} + \delta_{70})$$

avec

$$\delta_{70} = 2 M_2 \times 2 M_{23}$$

et

$$\frac{1}{2} (A^2)_{70} = A_0 A_{70} + a$$

avec

$$a = A_2 A_{23},$$

et des expressions analogues pour B'_{70} et β'_{70} , Q_{70} et π_{70} , K_{70} et η_{70} , K'_{70} et η'_{70} , $\frac{1}{2} (A'^2)_{70}$ et a' .

Il s'agit donc d'abord de faire les produits

$$M_2 M_{23}, \quad M_2 L_{23}, \quad M_{23} L_2, \quad L_2 L_{23}, \quad M_2 \frac{1}{2} S_{21}^2, \quad L_2 \frac{1}{2} S_{21}^2, \quad S_{21} S_{42}; \quad A_2 A_{23}, \quad A'_2 A'_{23}$$

qui sont des produits de séries suivant les puissances positives et négatives de σ^2 , puis de former les quantités δ , π , β , β' , η , η' , a , a' .

J'ai obtenu ainsi :

$$\begin{aligned} \delta_{70} &= -0,18284 + 0,02692\sigma^2 + 0,00140\sigma^4 + 0,00000\sigma^6 \\ &\quad + 0,18576\sigma^{-2} + 0,01904\sigma^{-4} + 0,00080\sigma^{-6}, \\ \pi_{70} &= -0,04571 + 0,00673\sigma^2 + 0,00035\sigma^4 + 0,00000\sigma^6 \\ &\quad + 0,04644\sigma^{-2} + 0,00476\sigma^{-4} + 0,00020\sigma^{-6}, \\ \beta_{70} &= +1,99407 + 0,40858\sigma^2 + 0,01651\sigma^4 + 0,00049\sigma^6 + 0,00001\sigma^8 \\ &\quad + 1,10120\sigma^{-2} + 0,05232\sigma^{-4} + 0,00175\sigma^{-6} + 0,00001\sigma^{-8}, \\ \beta'_{70} &= +1,07413 - 0,15180\sigma^2 - 0,00829\sigma^4 - 0,00029\sigma^6 - 0,00001\sigma^8 \\ &\quad + 0,16074\sigma^{-2} - 0,00440\sigma^{-4} - 0,00021\sigma^{-6} + 0,00001\sigma^{-8}, \\ \eta_{70} &= +0,08612 + 0,50454\sigma^2 + 0,02062\sigma^4 + 0,00058\sigma^6 + 0,00002\sigma^8 \\ &\quad - 0,00650\sigma^{-2} - 0,01151\sigma^{-4} - 0,00044\sigma^{-6} + 0,00001\sigma^{-8}, \\ \eta'_{70} &= -2,23360 + 0,39158\sigma^2 + 0,02048\sigma^4 + 0,00070\sigma^6 + 0,00000\sigma^8 \\ &\quad + 1,17194\sigma^{-2} + 0,06683\sigma^{-4} + 0,00246\sigma^{-6} + 0,00001\sigma^{-8}; \\ a_{70} &= +0,0951 + 0,0037\sigma^2 + 0,0000\sigma^4 \\ &\quad + 1,1070\sigma^{-2} + 0,0132\sigma^{-4}, \\ a'_{70} &= -0,8470 - 0,5231\sigma^2 - 0,0018\sigma^4 + 0,0000\sigma^6 \\ &\quad + 0,1647\sigma^{-2} + 0,0033\sigma^{-4} + 0,0001\sigma^{-6}, \\ a''_{70} &= +2,8825 + 0,1538\sigma^2 + 0,0024\sigma^4 \\ &\quad + 0,0643\sigma^{-2} - 0,0021\sigma^{-4}. \end{aligned}$$

Il n'y a plus qu'à procéder aux approximations successives.

Les équations sont les mêmes que pour l'indice 1; il faut seulement ajouter à l'équation de Laplace le terme $6m^2 a''_{70}$.

$$\begin{aligned} f_{70,k} &= -(1 - g_0) + 2(1 - h_0) + k(1 - m) \\ &= k(1 - m) + 1,04728 \end{aligned}$$

si l'on se reporte aux valeurs de g_0 et h_0 déjà calculées.

Je fais d'abord $k = 0$ et je remplace $Q, D, B, \dots$ par $(P_0 \pi_{70})_0; (C_0 \delta_{70})_0; (A_0 \beta_{70})_0, \dots$. J'obtiens ainsi

$$M_0 = -2,71, \quad A_0 = +2,66, \quad A'_0 = -4,90, \quad L_0 = +3,38 \quad \text{et} \quad +3,26.$$

J'introduis ces valeurs dans les séries $(2M + \delta)_{70}, \dots$ pour former $Q_{70,-2}, \dots$, et je trouve successivement

$$M_{-2} = +0,16, \quad A_{-2} = +1,40, \quad A'_{-2} = +0,13, \quad L_{-2} = +0,19 \quad \text{et} \quad +0,18,$$

puis revenant à $k = 0$,

$$M_0 = -3,55, \quad A_0 = +3,41, \quad A'_0 = -7,42, \quad L_0 = +4,94 \quad \text{et} \quad +4,94$$

et, successivement, en utilisant chaque fois les valeurs trouvées précédemment,

$$\begin{aligned} M_2 &= -0,13, & A_2 &= +0,05, & A'_2 &= +0,13, & L_2 &= -0,24, \\ M_4 &= 0,00, & A_4 &= 0,00, & A'_4 &= 0,00, & L_4 &= -0,01, \\ M_{-4} &= -0,01, & A_{-4} &= 0,00, & A'_{-4} &= 0,00, & L_{-4} &= -0,01, \\ M_{-2} &= +0,37, & A_{-2} &= +1,93, & A'_{-2} &= -0,02, & L_{-2} &= +0,53; \end{aligned}$$

enfin, revenant à $k = 0$, je trouve d'abord

$$M_0 = -3,83.$$

Les deux accroissements obtenus pour M_0 ,

$$-3,55 + 2,71 = -0,84 \quad \text{et} \quad -3,83 + 3,55 = -0,28$$

sont les premiers termes d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{3}$; en la continuant on trouve qu'on arrivera à $M_0 = -3,97$. Cette extrapolation est justifiée par ce fait que les modifications successives de M_0 se réper-

cutent très fortement sur les termes en σ^{-2} , d'où une nouvelle modification de M_0 , ...; au contraire, tout ce qui provient des termes en $\sigma^2, \sigma^4, \sigma^{-4}$ jusqu'alors négligés, modifie très peu M_0 .

Le calcul se poursuit de la même façon, en perfectionnant successivement les termes qui correspondent à $k = 2, k = 4, k = -4; k = 6, k = -6$; il suffit d'ailleurs, au point où nous en sommes, d'une, au plus de deux approximations nouvelles pour chacun de ces termes.

Les résultats finals, transcrits plus loin, comportent en particulier

$$M_0 = -3,9627;$$

l'extrapolation m'a donc évité quelques calculs.

Le mode de calcul est le même pour tous les termes où $s_1 + s_2$ est pair. Lorsque s_1 et s_2 sont tous deux différents de 0, ou lorsque r_1 et r_2 sont tous deux différents de 0, les termes $\varepsilon_1 \varepsilon_2 g_4, \dots$ de f introduisent des termes supplémentaires dans les équations.

Quand $s_1 + s_2$ est impair, il ne reste que l'équation de la latitude

$$\left(f^2 - 1 - \frac{3}{2}m^2\right)A'' + \left(1 + \frac{m^2}{2}\right)(B'' - K'') + \dots = 0.$$

Le calcul préliminaire est celui de $B'' - K''$.

Supposons qu'il s'agisse des termes en $\varepsilon_1 \gamma_1^2 \gamma_2$.

On obtient, en annulant dans l'équation de la latitude le coefficient de ce monome, et en lui faisant correspondre l'indice 98, l'équation suivante pour chaque valeur de k :

$$\left(f_{98,k}^2 - 1 - \frac{3}{2}m^2\right)A''_{98,k} + \left(1 + \frac{m^2}{2}\right)(B'' - K'')_{98,k} - (g_{24} + h_{24})A''_{41,k} f_{98,k} = 0,$$

$$f_{98,k} = k(1 - m) + 2 - g_0 - h_0.$$

Le terme $-(g_{24} + h_{24})A''_{41,k} f_{98,k}$ provient du terme $A''_{41,k} f_{41,k}^2 \gamma_1 \varepsilon_1 \cdot \sigma^k$ où

$$f_{41,k} = k(1 - m) + 2 - g_0 - h_0 - (g_{24} + h_{24})\gamma_1 \gamma_2 + \dots$$

T.

D'autre part,

$$\begin{aligned} A'' &= e^{M \operatorname{sh} S} \\ &= S + B'' = e^{M_0} e^{\varepsilon_1 M_1 + \gamma_1^2 M_{23} + \gamma_1 \gamma_2 M_{24} + \varepsilon_1 \gamma_1^2 M_{69} + \varepsilon_1 \gamma_1 \gamma_2 M_{71} + \dots} \\ &\quad \times (\gamma_1 S_{21} + \gamma_2 S_{22} + \varepsilon_1 \gamma_1 S_{41} + \varepsilon_1 \gamma_2 S_{43} + \gamma_1^2 \gamma_2 S_{27} + \varepsilon_1 \gamma_1^2 \gamma_2 S_{98} + \dots), \end{aligned}$$

d'où

$$A''_{98} = S_{98} + B''_{98} = \frac{1}{P_0} (S + X)_{98}.$$

De même

$$S_{98} + K''_{98} = P_0^2 (S + Y)_{98},$$

d'où

$$(B'' - K'')_{98} = A''_{98} (1 - P_0^3) + P_0^2 (X - Y)_{98},$$

$$S_{98} = P_0 A''_{98} - X_{98}$$

avec

$$\begin{aligned} X_{98} &= M_1 S_{27} + M_{71} S_{21} + M_{69} S_{22} + M_{24} S_{41} + M_{23} S_{43} + M_1 M_{24} S_{21} + M_1 M_{23} S_{22} \\ &\quad + \frac{1}{2} S_{21}^2 S_{43} + S_{21} S_{22} S_{41} + M_1 \frac{1}{2} S_{21}^2 S_{22}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{98} &= -2 M_1 S_{27} - 2 M_{71} S_{21} - 2 M_{69} S_{22} - 2 M_{24} S_{41} - 2 M_{23} S_{43} + 4 M_1 M_{24} S_{21} + 4 M_1 M_{23} S_{22} \\ &\quad + \frac{1}{2} S_{21}^2 S_{43} + S_{21} S_{22} S_{41} - 2 M_1 \frac{1}{2} S_{21}^2 S_{22}. \end{aligned}$$

L'indice 1 correspond à ε_1 , l'indice 21 correspond à γ_1 ;

» 23	» γ_1^2 ,	» 22	» γ_2 ;
» 24	» $\gamma_1 \gamma_2$,	» 41	» $\varepsilon_1 \gamma_1$;
» 69	» $\varepsilon_1 \gamma_1^2$,	» 43	» $\varepsilon_1 \gamma_2$;
» 71	» $\varepsilon_1 \gamma_1 \gamma_2$,	» 27	» $\gamma_1^2 \gamma_2$.

La marche des approximations est alors évidente. On calcule d'abord

$$\Phi = \left(1 + \frac{m^2}{2}\right) P_0^2 (X - Y)_{98} - (g_{24} + h_{24}) A''_{41} 2 f_{98}.$$

L'équation s'écrit

$$\left(f_k^2 - 1 - \frac{3}{2} m^2\right) A''_k + \Phi_k + \left(1 + \frac{m^2}{2}\right) [A''_{98} (1 - P_0^3)]_k = 0.$$

On fait successivement $k = 0, 2, -2, 0, 4, -4$. La petitesse du facteur $1 - P_0^3$ assure la convergence.

C'est ainsi que pour $p = 98$, on trouve successivement

$$\begin{aligned} A_0'' &= +0,22, & A_2'' &= +0,03, & A_{-2}'' &= -0,21, \\ A_4'' &= 0,00, & A_{-4}'' &= +0,04, & A_6'' &= 0,00, & A_{-6}'' &= 0,00, \end{aligned}$$

sans qu'il y ait lieu de procéder à une seconde approximation.

Les termes qui contiennent en facteur α ou ε' ne donnent lieu à aucune difficulté spéciale; le mode de calcul est toujours le même.

Enfin, $M_{p,0}$ ou $A_{p,0}''$ sont arbitraires quand, dans le monome M_p ,

$$r_1 + r_2 = 1 \quad \text{et} \quad s_1 + s_2 = 0$$

ou

$$r_1 + r_2 = 0, \quad s_1 + s_2 = 1.$$

Delaunay et M. Andoyer ont pris, dans ces cas, pour $L_{p,0}$ ou $A_{p,0}''$, les valeurs qui figurent dans le développement du mouvement elliptique où ε est l'excentricité, γ le sinus de la demi-inclinaison. Je ne me suis pas toujours astreint à cette condition, préférant éviter des grands nombres.

En outre, j'ai pris $M_{1,0} = +1$, c'est-à-dire que j'ai représenté l'excentricité par $-2\varepsilon + \dots$. Si donc on fait, suivant l'usage, correspondre la lettre ϖ au périjove, il faut prendre pour ε une valeur négative.

Dans le même ordre d'idées, j'ai choisi le coefficient de γ , dans A'' égal à $+1$: donc, si l'on fait correspondre θ au nœud ascendant, c'est-à-dire au point où $z = 0$, $\frac{dz}{dt} > 0$, il faut prendre pour γ une valeur négative, puisque le mouvement est rétrograde.

J'ai jugé plus commode de prendre pour ε et γ des valeurs positives : par suite les ϖ et θ que j'emploie dans la suite de ce travail correspondent respectivement à l'apojove et au nœud descendant.



CHAPITRE II.

RÉSULTATS DES CALCULS.

J'ai d'abord donné à m la valeur $-0,20$ et j'ai calculé la plupart des termes jusqu'au troisième degré en considérant ε et γ comme du premier degré, α et ε' comme du second degré, ce qui est justifié par les valeurs numériques de ces quantités.

Voici les résultats obtenus :

La première colonne indique le monome M_p considéré, la deuxième l'exposant k de σ , positif, négatif ou nul, la troisième la valeur numérique de $M_{p,k}$, la quatrième celle de $A_{p,k}$, la cinquième celle de $A'_{p,k}$, la sixième celle de $L_{p,k}$; enfin la septième donne, s'il y a lieu, un terme g ou h :

		M.	A.	A'.	L.	
1	0	+0,000643	+1,000557	+1,000557	0	
	2	-0,011412	+0,003302	-0,026145	+0,014715	
	-2	-0,011412	-0,026145	+0,003302	-0,014715	
	4	-0,000157	+0,000036	-0,000002	+0,000188	
	-4	-0,000157	-0,000002	+0,000036	-0,000188	
	6	-0,000004	+0,000003	+0,000000	-0,000002	
	-6	-0,000004	0,000000	+0,000003	+0,000002	
	8	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	
	-8	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	
g_0						
ε_1	0	1	-1,01918	+3,01491	-2,01678	+0,00159
	2	+0,03695	-0,01434	+0,00605	-0,04791	
	-2	-0,24706	-0,61439	+0,15642	-0,39349	
	4	+0,00101	-0,00028	+0,00001	-0,00122	
	-4	-0,00759	-0,00045	+0,00257	-0,00958	
	6	+0,00003	0,00000	0,00000	-0,00003	
	-6	-0,00021	0,00000	+0,00005	-0,00024	
	8	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	
	-8	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	

		M.	A.	A'.	L.	
ε_1	0	-1,5596	+1,5611	+0,4210	+2,5923	
	2	-0,1078	+0,0477	-0,0011	+0,1390	
	-2	-0,0163	+1,3946	-0,3735	+0,7991	
	4	-0,0045	+0,0014	+0,0001	+0,0055	
	-4	-0,0706	+0,0167	+0,0426	-0,0978	
	6	-0,0002	0,0000	0,0000	+0,0002	
	-6	-0,0045	+0,0001	+0,0016	-0,0055	
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
	-8	-0,0002	0,0000	+0,0001	-0,0002	
$\varepsilon_1 \varepsilon_2$	0	+1,0405	-2,1091	-2,1091	0	
	2	+0,7562	-0,5522	-0,0915	-1,1183	
	-2	+0,7562	-0,0915	-0,5522	+1,1183	
	4	+0,0462	-0,0180	-0,0003	-0,0581	
	-4	+0,0462	-0,0003	-0,0180	+0,0581	
	6	+0,0019	-0,0003	0,0000	-0,0021	
	-6	+0,0019	0,0000	-0,0003	+0,0021	
γ_1^2	0	-0,0480	+0,0196	+0,8950	-0,4355	
	2	-0,0014	+0,0004	+0,0032	-0,0131	
	-2	+0,0660	+0,4495	-0,2068	+0,3294	
	4	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0004	
	-4	+0,0055	+0,0049	-0,0011	+0,0084	
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
	-6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
$\gamma_1 \gamma_2$	0	-0,0004	-1,0042	-1,0042	0	
	2	+0,0251	-0,0106	-0,0539	+0,0365	
	-2	+0,0251	-0,0539	-0,0106	-0,0365	
	4	+0,0007	-0,0001	-0,0002	+0,0012	
	-4	+0,0007	-0,0002	-0,0001	-0,0012	
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
	-6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
ε_1^3	0	+3,0627	-2,8557	-0,3160	-4,6512	
	2	+0,3076	-0,1440	-0,0039	-0,3923	
	-2	+1,0553	-2,4704	+0,4673	-1,8082	
	4	+0,0177	-0,0058	-0,0002	-0,0213	
	-4	+0,1125	-0,1294	-0,1467	+0,2585	
	6	+0,0008	-0,0002	0,0000	+0,0008	
	-6	-0,0227	+0,0019	+0,0129	-0,0293	
$\varepsilon_1^2 \varepsilon_2$	0	-1,535	+3,375	+0,778	+0,883	g_4
	2	-2,206	+1,634	+0,153	+3,109	+0,099
	-2	+0,066	+1,070	+0,294	-0,808	
	4	-0,202	+0,085	+0,003	+0,253	
	-4	+0,441	-0,032	-0,276	+0,590	
	6	-0,011	+0,003	0,000	+0,013	
	-6	+0,041	0,000	-0,014	+0,049	

		M.	A.	A'.	L.
$\varepsilon_1 \gamma_1^2$	0	+0,18	-0,08	-0,96	+1,78
	2	+0,01	0,00	-0,01	+0,10
	-2	+0,52	-1,15	+0,26	-0,70
	4	0,00	0,00	0,00	0,00
	-4	+0,09	-0,08	-0,09	+0,14
	6	0,00	0,00	0,00	0,00
	-6	0,00	0,00	0,00	0,00
$\varepsilon_2 \gamma_1^2$	0	-4,36	+4,13	-9,74	+6,49
	2	-0,17	+0,07	+0,13	-0,21
	-2	+0,59	+2,67	-0,10	+0,85
	4	0,00	0,00	0,00	-0,02
	-4	0,00	-0,02	+0,01	-0,03

 g_{21}

$\varepsilon_1 \gamma_1 \gamma_2$	0	0	+1,22	-2,88	+0,02	-0,151
	2	-0,09	+0,05	+0,10	-0,16	
	-2	+0,29	+1,11	-0,31	+0,28	
	4	0,00	0,00	0,00	-0,01	
	-4	+0,02	0,00	-0,03	-0,01	

Voici maintenant les termes pour lesquels $s_1 + s_2$ est impair, qui ne comportent que A'' et S :

		A".	S.	h_0 .			A".	S.
γ_1	0	1	+0,99999	-0,02996	$\gamma_1 \varepsilon_1$	0	-1,0025	-2,005
	2	+0,00326	+0,01467	2		-0,0142	-0,077	
	-2	+0,04266	+0,05404	-2		-0,5289	-0,347	
	4	+0,00004	+0,00029	4		-0,0003	-0,003	
	-4	+0,00020	+0,00091	-4		+0,0080	+0,023	
γ_1^3	0	+0,0179	-0,097	$\gamma_1 \varepsilon_2$	0	+2,8496	+1,8621	
	2	+0,0003	-0,003		2	+0,1532	+0,4183	
	-2	+0,3272	+0,246		-2	-0,0541	-0,1125	
	4	0,0000	0,000		4	+0,0023	+0,0155	
	-4	-0,0109	-0,013		-4	-0,0008	-0,0046	
				h_{24} .				
$\gamma_1^2 \gamma_2$	0	0		+0,0658	$\gamma_1 \varepsilon_1^2$	0	+1,533	
	2	-0,0081		2		+0,047		
	-2	+0,1414		-2		+0,733		
	4	-0,0001		4		+0,001		
	-4	+0,0014		-4		-0,051		
					6	0,000		
					-6	+0,002		

Voici enfin les coefficients du premier terme de la parallaxe α , ou plus exactement de $\frac{5}{16} \alpha m^2 \omega^{-\frac{1}{3}}$ (ils contiennent les puissances impaires de σ) et aussi quelques termes du quatrième degré que j'ai calculés pour me rendre compte de leur importance, et les termes dépendant de l'excentricité solaire :

		M.	A.	A'.	L.
$\frac{5}{16} \alpha m^2 \omega^{-\frac{1}{3}}$	1	—3,20	+2,29	—8,78	+5,52
	—1	—3,20	—8,78	+2,29	—5,52
	3	—0,48	+0,10	—0,84	+0,57
	—3	—0,48	—0,84	+0,10	—0,57
	5	0,00	0,00	0,00	0,00
	—5	0,00	0,00	0,00	0,00
ε_1^4	0	—6,67	+5,77	+0,37	+9,60
	2	—0,88	+0,42	+0,01	+1,11
	—2	—3,29	+5,36	—0,03	+5,01
	4	—0,06	+0,02	0,00	+0,07
	—4	—0,03	+0,63	+0,19	—0,24
	6	0,00	0,00	0,00	0,00
	—6	+0,09	—0,02	—0,07	+0,13
	8	0,00	0,00	0,00	0,00
	—8	—0,01	0,00	0,00	—0,01
$\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2$	0	+1,38	—1,61	—1,61	0
	2	—0,63	+0,40	—0,57	—0,70
	—2	—0,63	—0,57	+0,40	+0,70
	4	—2,01	+1,24	+0,12	+2,57
	—4	—2,01	+0,12	+1,24	—2,57
γ_1^4	0	0,00	0,00	+0,02	+0,18
	2	0,00	0,00	0,00	+0,01
	—2	—0,06	+0,03	+0,14	—0,14
	4	0,00	0,00	0,00	0,00
	—4	—0,01	+0,07	+0,05	—0,03
ε_1'	0	+0,02	+0,23	—0,19	+0,21
	2	0,00	0,00	+0,01	0,00
	—2	—0,03	—0,08	+0,01	—0,04
	4	0,00	0,00	0,00	0,00
	—4	0,00	0,00	0,00	0,00

Je n'ai pas calculé les termes en $\alpha\varepsilon$, $\alpha\gamma$, $\varepsilon'\varepsilon$, $\varepsilon'\gamma$, mais ils sont certainement très petits, et auraient bien peu d'influence sur le résultat qui va suivre.

La valeur $m = -0,20$ a été choisie presque au hasard, car lorsque j'ai commencé ces calculs je ne disposais encore que des observations de 1908 et 1909, c'est-à-dire que le satellite n'avait décrit qu'une demi-révolution. Il s'agissait donc avant tout de lui substituer une valeur plus exacte.

Pour y parvenir j'ai tenu compte de la première révolution du satellite, que MM. Cowell, Crommelin, Davidson venaient de calculer, en parfait accord avec les observations. Les inégalités considérables que décelait leur orbite, le désaccord existant entre la période de 730 jours qu'ils indiquaient et le demi-grand axe $+0,158$, m'ont obligé à tenir compte des perturbations approchées calculées dans l'hypothèse $m = -0,20$.

J'ai fait le calcul d'une part avec les longitudes pour obtenir la durée de la révolution, d'autre part avec les rayons vecteurs pour obtenir le grand axe de l'orbite.

J'ai adopté les constantes suivantes : origine des temps, 3 mai 1908, l'axe des x tel que $\omega = 0$, puis

$$\begin{aligned} \varepsilon &= +0,183, & \varepsilon' &= +0,048, & \gamma &= +0,23, \\ \varpi &= +50^\circ, & \varpi' &= -85^\circ, & \theta &= +144^\circ, & \omega' &= +38^\circ. \end{aligned}$$

Je calcule alors à l'aide des valeurs des L que pendant la révolution qui commence le 21 octobre 1908, l'inégalité λ a augmenté de $+72'$.

Or, d'après MM. Cowell, Crommelin et Davidson, ν a diminué de 2π (je dis *diminué* puisque le mouvement est rétrograde) à partir de la date considérée en 744 jours. En désignant par n le moyen mouvement diurne, nous avons donc

$$-2\pi = 744n + 72';$$

d'où

$$n = -1747'' \text{ par jour.}$$

Or le moyen mouvement diurne de Jupiter autour du Soleil est

$$299'',1.$$

Donc la valeur de m conclue de ce calcul est

$$m = -\frac{299,1}{1747} = -0,1712.$$

Pour le rayon vecteur, je me sers des valeurs du maximum et du mini-

mum du rayon vecteur 0,216 et 0,100. Je calcule pour deux valeurs déterminées de ε le maximum et le minimum de $\frac{r}{a}$ dans la période considérée (1908-1910), à l'aide des valeurs approchées des constantes, et des valeurs des M pour $m = -0,20$. J'aurai ainsi deux équations qui me donneront ε et a .

Je trouve que pour $\varepsilon = +0,20$ le minimum et le maximum de $\frac{M}{2}$ sont $-0,213$ et $+0,144$; pour $\varepsilon = +0,21$, $-0,227$ et $+0,149$. Or il faut

$$\frac{1}{2}(M_{\max.} - M_{\min.}) = \frac{1}{2} \log \frac{0,216}{0,100} = 0,385,$$

ceci donne

$$\varepsilon = 0,215$$

et

$$\begin{aligned} a = r_0^{\frac{1}{3}} e^{-M} &= 0,100 \times 1,007 e^{0,468} \\ &= 0,216 \times 1,007 e^{-0,302} = 0,1596 \\ -m &= \left(\frac{0,1596}{5,2028} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1047} = 0,1736. \end{aligned}$$

J'adopte pour m la moyenne de ces deux déterminations

$$m = -0,172.$$

C'est d'ailleurs ce que j'aurais obtenu en prenant pour grand axe la somme du minimum 0,100 du rayon vecteur en octobre 1908 et de son maximum 0,216 en décembre 1910. C'est évidemment une simple coïncidence, étant donnés les grands écarts qui peuvent exister entre deux maxima ou deux minima successifs.

J'ai repris complètement le calcul avec $m = -0,172$. J'ai calculé tous les termes jusqu'au quatrième degré par rapport à ε , γ , α , ε' , ces deux dernières quantités étant considérées comme du second degré à cause de leur valeur numérique plus petite. J'ai calculé chaque fois un nombre de décimales suffisant pour qu'une unité du dernier ordre représentât au plus 0'',2 ou 0'',3 dans la position de VIII Jupiter vu de la Terre.

C'est une précision un peu excessive, puisque j'ai négligé des termes plus importants du cinquième degré par rapport à ε et γ . J'ai cru bon toutefois d'admettre cette précision pour qu'il ne subsistât aucun doute sur la convergence, au moins pratique, des approximations successives, et pour que la divergence qui se manifeste entre le calcul et l'observation pût être attribuée uniquement aux termes négligés.

Voici le Tableau des résultats; la disposition en est la même que pour $m = -0,20$:

		M.	A.	A'.	L.	
I	0	+0,000390	+1,000334	+1,000334	0	
	2	—0,009061	+0,002706	—0,020834	+0,011765	
	—2	—0,009061	—0,020834	+0,002706	—0,011765	
	4	—0,000099	+0,000025	—0,000002	+0,000120	
	—4	—0,000099	—0,000002	+0,000025	—0,000120	
	6	—0,000001	0,000000	0,000000	+0,000002	
	—6	—0,000001	0,000000	0,000000	—0,000002	
	8	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	
	—8	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	
ε_1	0	I	—1,016483	+3,013023	—2,014748	+0,002683
	2	+0,029198	—0,011634	+0,004484	—0,038069	
	—2	—0,222405	—0,564145	+0,148407	—0,362644	
	4	+0,000633	—0,000182	—0,000008	—0,000766	
	—4	—0,005511	—0,000328	+0,001942	—0,006997	
	6	+0,000013	—0,000004	0,000000	—0,000016	
	—6	—0,000118	—0,000003	+0,000032	—0,000141	
	8	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	
	—8	—0,000002	0,000000	0,000000	—0,000003	
ε_1^2	0	—1,54201	+1,54930	+0,45015	+2,56815	
	2	—0,08465	+0,03825	—0,00051	+0,10963	
	—2	—0,04849	+1,19508	—0,30673	+0,68143	
	4	—0,00283	+0,00090	+0,00004	+0,00342	
	—4	—0,05979	+0,01406	+0,03817	—0,08446	
	6	—0,00008	+0,00002	0,00000	+0,00010	
	—6	—0,00298	+0,00003	+0,00112	—0,00372	
	8	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	
	—8	—0,00011	0,00000	+0,00002	—0,00012	

		M.	A.	A'.	L.	
$\varepsilon_1 \varepsilon_2$	0	+1,03460	-2,09784	-2,09784	0	
	2	+0,67702	-0,51399	-0,09748	-1,01547	
	-2	+0,67702	-0,09748	-0,51399	+1,01547	
	4	+0,03328	-0,01343	-0,00025	-0,04210	
	-4	+0,03328	-0,00025	-0,01343	+0,04210	
	6	+0,00109	-0,00033	-0,00002	-0,00131	
	-6	+0,00109	-0,00002	-0,00033	+0,00131	
	8	+0,00002	-0,00001	0,00000	-0,00003	
	-8	+0,00002	0,00000	-0,00001	+0,00003	
γ_1^2	0	-0,03495	+0,01354	+0,92277	-0,45312	
	2	-0,00078	+0,00022	+0,00265	-0,01080	
	-2	+0,04821	+0,36721	-0,17176	+0,27076	
	4	-0,00001	0,00000	+0,00002	-0,00025	
	-4	+0,00339	+0,00382	-0,00152	+0,00627	
	6	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	
	-6	+0,00007	0,00000	-0,00006	+0,00015	
$\gamma_1 \gamma_2$	0	-0,00036	-1,00337	-1,00337	0	
	2	+0,01979	-0,00864	-0,05375	+0,03435	
	-2	+0,01979	-0,05375	-0,00864	-0,03435	
	4	+0,00043	-0,00014	-0,00028	+0,00081	
	-4	+0,00043	-0,00028	-0,00014	-0,00081	
	6	+0,00001	0,00000	0,00000	+0,00002	
	-6	+0,00001	0,00000	0,00000	-0,00002	
ε_1^3	0	+2,9940	-2,8126	-0,3240	-4,5612	
	2	+0,2397	-0,1150	-0,0035	-0,3076	
	-2	+0,9252	-2,1003	+0,3279	-1,5384	
	4	+0,0109	-0,0037	-0,0002	-0,0132	
	-4	+0,0767	-0,1046	-0,1110	+0,1907	
	6	+0,0004	-0,0001	0,0000	-0,0005	
	-6	-0,0192	+0,0017	+0,0113	-0,0251	
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
	-8	-0,0015	0,0000	+0,0006	-0,0019	
$\varepsilon_1^2 \varepsilon_2$	0	-1,5000	+3,1070	+0,8940	+0,6655	$\varepsilon_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}^2$
	2	-1,9588	+1,4984	+0,1509	+2,7889	+0,0661
	-2	+0,1240	+0,9296	+0,1616	-0,6186	
	4	-0,1445	+0,0626	+0,0020	+0,1819	
	-4	+0,3685	-0,0273	-0,2411	+0,5002	
	6	-0,0064	+0,0025	+0,0001	+0,0080	
	-6	+0,0268	-0,0004	-0,0109	+0,0335	
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
	-8	+0,0012	0,0000	-0,0004	+0,0015	

		M.	A.	A'.	L.
$\varepsilon_1 \gamma_1^2$	0	+0,1250	-0,0618	-0,0764	+1,8449
	2	+0,0052	-0,0017	-0,0116	+0,0789
	-2	+0,4328	-0,9515	+0,2231	-0,5963
	4	+0,0001	0,0000	-0,0002	+0,0025
	-4	+0,0525	-0,0619	-0,0617	+0,0904
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	-6	+0,0032	+0,0004	-0,0015	+0,0052
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	-8	+0,0001	0,0000	0,0000	+0,0002
$\varepsilon_2 \gamma_1^2$	0	-3,9627	+3,8013	-8,6534	+5,7633
	2	-0,1328	+0,0532	+0,1282	-0,2329
	-2	+0,4810	+2,2194	-0,0971	+0,7153
	4	-0,0033	+0,0010	+0,0020	-0,0124
	-4	+0,0004	-0,0022	+0,0028	-0,0072
	6	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0005
	-6	-0,0002	0,0000	+0,0002	-0,0006
$\varepsilon_1 \gamma_1 \gamma_2$	0	0	+1,1731	-2,9064	+0,0129
	2	-0,0658	+0,0384	+0,0887	-0,1503
	-2	+0,2980	+1,1189	-0,3289	+0,3214
	4	-0,0028	+0,0010	+0,0012	-0,0066
	-4	+0,0194	-0,0130	-0,0087	-0,0211
	6	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001
	-6	+0,0006	-0,0003	-0,0002	-0,0010
ε_1^4	0	-6,455	+5,636	+0,381	+9,305
	2	-0,676	+0,330	+0,011	+0,855
	-2	-2,774	+4,523	+0,101	+4,182
	4	-0,039	+0,014	+0,001	+0,047
	-4	+0,006	+0,549	+0,083	-0,100
	6	-0,003	0,000	0,000	+0,002
	-6	+0,049	-0,010	-0,047	+0,084
	8	0,000	0,000	0,000	0,000
	-8	-0,007	0,000	+0,001	-0,007
$\varepsilon_1^3 \varepsilon_2$	0	+4,178	-6,824	+1,022	-3,916
	2	+5,622	-4,184	-0,259	-7,715
	-2	+0,141	-0,144	-0,049	+1,439
	4	+0,550	-0,247	-0,010	-0,685
	-4	-0,264	+0,118	+0,363	-0,675
	6	+0,031	-0,010	0,000	-0,037
	-6	+0,182	-0,007	-0,107	+0,232
	8	+0,001	0,000	0,000	0,000
	-8	+0,018	0,000	-0,007	+0,021

 $g_{\gamma_1 \gamma_2}$

-0,1131

		M.	A.	A'.	L.
$\varepsilon_4^2 \varepsilon_2^2$	0	+1,213	-2,168	-2,168	0
	2	-0,739	+0,613	-0,492	-0,161
	-2	-0,739	-0,492	+0,613	+0,161
	4	-1,633	+1,064	+0,068	+2,359
	-4	-1,633	+0,068	+1,064	-2,359
	6	-0,159	+0,066	+0,005	+0,208
	-6	-0,159	+0,005	+0,066	-0,208
	8	-0,009	+0,001	0,000	+0,010
	-8	-0,009	0,000	+0,001	-0,010
$\varepsilon_1^2 \gamma_1^2$	0	-0,402	+0,217	+1,511	-6,112
	2	-0,025	+0,009	+0,038	-0,388
	-2	-1,499	+2,243	+0,295	+0,874
	4	-0,001	0,000	+0,001	-0,016
	-4	-0,066	+0,355	+0,137	-0,166
	6	0,000	0,000	0,000	0,000
	-6	+0,029	-0,007	-0,025	+0,037
	8	0,000	0,000	0,000	0,000
	-8	+0,002	0,000	-0,001	+0,003
$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \gamma_1^2$	0	+12,440	-12,116	-5,253	-12,350
	2	+0,791	-0,360	-0,500	+1,772
	-2	+0,597	-10,014	+2,605	-4,761
	4	+0,031	-0,010	-0,014	+0,129
	-4	+0,070	-0,056	+0,079	+0,067
	6	0,000	0,000	0,000	+0,006
	-6	-0,008	0,000	+0,013	-0,020
	8	0,000	0,000	0,000	0,000
	-8	0,000	0,000	0,000	-0,001
$\varepsilon_2^2 \gamma_1^2$	0	-3,825	+3,714	+4,249	-1,231
	2	-2,530	+1,900	-0,204	+3,287
	-2	-1,429	+0,011	+0,721	-2,266
	4	-0,136	+0,055	+0,036	-0,080
	-4	-0,036	+0,004	+0,005	-0,026
	6	-0,005	+0,002	+0,001	-0,008
	-6	0,000	0,000	0,000	0,000
$\varepsilon_1^2 \gamma_1 \gamma_2$	0	-0,09	-1,81	+6,51	-3,30
	2	+0,19	-0,13	-0,14	+0,44
	-2	+0,44	+1,33	-0,73	+1,89
	4	+0,01	-0,01	0,00	+0,03
	-4	+0,19	+0,08	-0,15	+0,28
	6	0,00	0,00	0,00	0,00
	-6	+0,01	0,00	+0,01	-0,01

		M.	A.	A'.	L.
$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \gamma_1 \gamma_2$	0	-0,22	+2,51	+2,51	0
	2	-0,96	+1,24	-0,14	+0,95
	-2	-0,96	-0,14	+1,24	-0,95
	4	-0,12	+0,07	+0,05	-0,15
	-4	-0,12	+0,05	+0,07	+0,15
	6	-0,01	0,00	0,00	-0,01
	-6	-0,01	0,00	0,00	+0,01
γ_1^4	0	-0,002	+0,001	+0,013	+0,202
	2	0,000	0,000	0,000	+0,010
	-2	-0,041	+0,022	+0,093	-0,118
	4	0,000	0,000	0,000	0,000
	-4	-0,007	+0,029	+0,031	-0,028
	6	0,000	0,000	0,000	0,000
	-6	-0,001	0,000	0,000	-0,002
$\gamma_1^3 \gamma_2$	0	+0,013	-0,019	+0,952	-0,934
	2	+0,002	-0,001	-0,005	-0,053
	-2	-0,012	-0,348	+0,274	-0,041
	4	0,000	0,000	0,000	-0,002
	-4	-0,010	+0,009	+0,006	+0,017
	6	0,000	0,000	0,000	0,000
	-6	0,000	0,000	0,000	0,000
$\gamma_1^2 \gamma_2^2$	0	+0,050	-0,965	-0,965	0
	2	+0,018	-0,006	-0,106	+0,266
	-2	+0,018	-0,106	-0,006	-0,266
	4	+0,001	0,000	-0,001	+0,013
	-4	+0,001	-0,001	0,000	-0,013
	6	0,000	0,000	0,000	0,000
	-6	0,000	0,000	0,000	0,000
		M.	A.	A'.	L.
$\frac{5}{16} \alpha m^2 \omega^{-\frac{1}{3}}$	1	-4,02	+3,01	-11,12	+7,05
	-1	-4,02	-11,12	+3,01	-7,05
	3	-0,51	+0,10	-0,89	+0,61
	-3	-0,51	-0,89	+0,10	-0,61
	5	-0,01	0,00	0,00	+0,01
	-5	-0,01	0,00	0,00	-0,01
$\frac{5}{16} m^2 \omega^{-\frac{1}{3}} \alpha \varepsilon_1$	1	+10,6	-9,5	-3,9	-17,4
	-1	+0,8	+56,8	-37,9	+46,3
	3	+2,2	-0,6	+0,9	-2,7
	-3	-8,2	-12,3	+3,0	-10,5
	5	+0,1	0,0	0,0	0,0
	-5	-0,5	-0,1	+0,1	-0,6

		M.	A.	A'.	L.
$\frac{5}{16} m^2 \omega^{-\frac{1}{3}} \alpha \varepsilon_1^2$	1	-29	+ 26	+ 2	+ 44
	-1	+44	-103	+ 1	- 88
	3	- 8	+ 3	- 1	+ 10
	-3	-53	-149	+ 21	- 74
	5	0	0	0	0
	-5	- 5	0	+ 2	- 7
$\frac{5}{16} m^2 \omega^{-\frac{1}{3}} \alpha \varepsilon_1 \varepsilon_2$	1	-16	+ 60	+ 97	+ 46
	-1	-16	+ 97	+ 60	- 46
	3	+35	- 16	+ 6	- 44
	-3	+35	+ 6	- 16	+ 44
	5	+ 4	- 1	0	- 5
	-5	+ 4	0	- 1	+ 5
$\frac{5}{16} m^2 \omega^{-\frac{1}{3}} \alpha \gamma_1^2$	1	0	0	+ 2	- 8
	-1	+61	- 77	+178	-126
	3	0	0	0	- 1
	-3	-19	- 53	+ 11	- 30
	5	0	0	0	0
	-5	0	0	0	0
$\frac{5}{16} m^2 \omega^{-\frac{1}{3}} \alpha \gamma_1 \gamma_2$	1	+45	- 40	+151	- 88
	-1	+45	+151	- 40	+ 88
	3	+ 3	- 1	+ 1	- 2
	-3	+ 3	+ 1	- 1	+ 2
	5	0	0	0	0
	-5	0	0	0	0

		M.	A.	A'.	L.
ε_1'	0	+0,018	+0,231	-0,196	+0,214
	2	+0,002	0,000	+0,008	-0,003
	-2	-0,022	-0,055	+0,005	-0,028
	4	0,000	0,000	0,000	0,000
	-4	-0,001	0,000	0,000	0,000
$\varepsilon_1' \varepsilon_1$	0	+0,30	-0,58	+0,34	-0,64
	2	0,00	0,00	0,00	0,00
	-2	-0,42	-1,12	+0,20	-0,62
	4	0,00	0,00	0,00	0,00
	-4	-0,02	0,00	+0,01	-0,03
$\varepsilon_2' \varepsilon_1$	0	-0,17	+0,37	+0,18	+0,34
	2	+0,07	-0,02	+0,02	-0,09
	-2	+0,18	+0,61	-0,12	+0,33
	4	0,00	0,00	0,00	0,00
	-4	+0,01	0,00	0,00	0,00

		M.	A.	A'.	L.
$\varepsilon'_1 \varepsilon_1^2$	0	-1,01	+1,41	+0,08	+1,68
	2	-0,04	+0,02	0,00	+0,04
	-2	+0,15	+3,36	-0,83	+1,78
	4	0,00	0,00	0,00	0,00
	-4	-0,21	+0,06	+0,11	-0,28
$\varepsilon'_2 \varepsilon_1^2$	0	+0,45	-0,80	-0,16	-0,78
	2	-0,20	+0,08	0,00	+0,25
	-2	+0,21	-0,60	-0,39	+0,01
	4	0,00	0,00	0,00	0,00
	-4	+0,12	-0,01	-0,07	+0,15
$\varepsilon'_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2$	0	+0,12	-1,07	+0,25	-0,17
	2	-0,33	+0,20	+0,17	+0,52
	-2	+1,17	-0,08	-0,66	+1,66
	4	-0,02	+0,01	0,00	+0,03
	-4	+0,14	0,00	-0,05	+0,16
$\varepsilon'_1 \gamma_1^2$	0	-0,07	+0,03	-0,30	+0,08
	2	0,00	0,00	0,00	0,00
	-2	+0,18	+0,99	-0,39	+0,67
	4	0,00	0,00	0,00	0,00
	-4	+0,02	+0,01	-0,01	+0,03
$\varepsilon'_2 \gamma_1^2$	0	-0,04	+0,01	+0,02	+0,09
	2	0,00	0,00	0,00	-0,02
	-2	-0,01	-0,27	+0,05	-0,14
	4	0,00	0,00	0,00	0,00
	-4	0,00	-0,01	0,00	-0,01
$\varepsilon'_1 \gamma_1 \gamma_2$	0	-0,14	-1,59	+1,34	-1,26
	2	+0,03	-0,01	+0,10	-0,06
	-2	+0,03	-0,07	-0,01	-0,07
	4	0,00	0,00	0,00	0,00
	-4	0,00	0,00	0,00	0,00
$\varepsilon_1'^2$	0	-0,03	-0,03	+0,03	-0,03
	2	0,00	0,00	0,00	0,00
	-2	-0,05	-0,11	+0,01	-0,06
	4	0,00	0,00	0,00	0,00
	-4	0,00	0,00	0,00	0,00
$\varepsilon'_1 \varepsilon'_2$	0	0,00	-0,04	-0,04	0,00
	2	+0,01	0,00	+0,03	-0,01
	-2	+0,01	+0,03	0,00	+0,01
	4	0,00	0,00	0,00	0,00
	-4	0,00	0,00	0,00	0,00

	M.	A.	A'.	L.
$\frac{5}{16} m^2 \omega^{-\frac{1}{3}} \alpha \varepsilon'_1$	1	-93	+94	-278
	-1	+17	+40	-12
	3	-2	+1	0
	-3	-1	-4	0

 Puissances impaires de γ .

	A".	S.	h_1 .		A".	S.	$h_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$.		
γ_1	0	+1	+1,00007	-0,02230	$\gamma_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2$	0	-2	-3,9778	-0,1038
	2	+0,00268	+0,01175			2	-0,5063	-1,8568	
	-2	+0,03924	+0,04829			-2	-0,0513	+0,3433	
	4	+0,00002	+0,00018			4	-0,0131	-0,0931	
	-4	+0,00014	+0,00064			-4	-0,0253	-0,0878	
	6	0,00000	0,00000			6	-0,0003	-0,0033	
	-6	0,00000	0,00000			-6	-0,0007	-0,0049	
						8	0,0000	0,0000	
						-8	0,0000	-0,0001	
$\gamma_1 \varepsilon_1$	0	-1,00356	-2,00655		$\gamma_2 \varepsilon_1^2$	0	+3,3010	+4,1621	
	2	-0,01152	-0,06161			2	-0,0691	-0,1893	
	-2	-0,47756	-0,31227			-2	+0,4907	+0,1989	
	4	-0,00018	-0,00158			4	-0,0020	-0,0124	
	-4	+0,00694	+0,01809			-4	-0,0369	-0,1601	
	6	0,00000	-0,00002			6	0,0000	-0,0004	
	-6	+0,00010	+0,00062			-6	-0,0011	-0,0083	
	8	0,00000	0,00000			8	0,0000	0,0000	
	-8	0,00000	+0,00001			-8	0,0000	-0,0003	
$\gamma_2 \varepsilon_1$	0	-2,87688	-1,88721		γ_1^3	0	+0,0131	-0,1173	
	2	+0,04857	+0,09985			2	+0,0002	-0,0044	
	-2	-0,14600	-0,38294			-2	+0,2688	+0,1979	
	4	+0,00062	+0,00334			4	0,0000	-0,0002	
	-4	-0,00192	-0,01159			-4	-0,0079	-0,0127	
	6	+0,00001	+0,00007			6	0,0000	0,0000	
	-6	-0,00003	-0,00029			-6	-0,0001	-0,0005	
$\gamma_1 \varepsilon_1^2$	0	+1,5287	+4,5904						
	2	+0,0379	+0,2400						
	-2	+0,6350	+0,8357						
	4	+0,0009	+0,0087						
	-4	-0,0397	-0,0781						
	6	0,0000	+0,0002						
	-6	+0,0016	+0,0068						
	8	0,0000	0,0000						
	-8	0,0000	+0,0004						
T.									

	A".	S.	$h_{\gamma_1 \gamma_2}$.	
$\gamma_1^2 \gamma_2$	0	0	+0,4705	+0,0482
	2	-0,0067	+0,0071	
	-2	+0,1125	+0,1950	
	4	-0,0001	+0,0002	
	-4	+0,0010	+0,0070	
	6	0,0000	0,0000	
	-6	0,0000	+0,0001	
	8	0,0000	0,0000	
	-8	0,0000	0,0000	
				5

Puissances impaires de γ .

		A".	S.			A".	S.
$\varepsilon'_1 \gamma_1$	0	+0,03	+0,01	$\varepsilon'_1 \varepsilon_1 \gamma_2$	0	-0,63	-0,33
	2	0,00	0,00		2	-0,02	-0,05
	-2	+0,05	+0,07		-2	-0,24	-0,70
	4	0,00	0,00		4	0,00	0,00
	-4	0,00	0,00		-4	-0,01	-0,05
$\varepsilon'_2 \gamma_1$	0	-0,02	-0,04	$\varepsilon'_1 \gamma_1 \varepsilon_2$	0	-0,56	-0,45
	2	+0,01	+0,03		2	-0,15	-0,35
	-2	-0,03	-0,03		-2	-0,07	-0,15
	4	0,00	0,00		4	0,00	0,00
	-4	0,00	0,00		-4	0,00	0,00
$\varepsilon'_1 \varepsilon_1 \gamma_1$	0	-0,34	-0,64	$\varepsilon'_2 \gamma_1 \varepsilon_1$	0	+0,21	+0,44
	2	0,00	0,00		2	-0,02	-0,14
	-2	-0,98	-0,65		-2	+0,42	+0,28
	4	0,00	0,00		4	0,00	0,00
	-4	+0,01	+0,03		-4	0,00	-0,03

Ces résultats appellent quelques remarques :

1° Les différents termes, correspondant à un même monome M_p , décroissent très vite à mesure que l'exposant de σ croît; les termes en σ^8 et σ^{-8} sont toujours très petits;

2° Cette décroissance est généralement plus rapide et les termes sont généralement plus petits pour les coefficients des puissances de γ que pour ceux des puissances de ε ; pour les termes mixtes, dépendant à la fois de ε et de γ , la décroissance est d'autant plus rapide que l'exposant de γ est plus grand, celui de ε plus petit;

3° Les termes décroissent beaucoup moins vite par rapport à leur degré en ε et γ que par rapport à leur degré en σ , pour les valeurs numériques actuelles de ces quantités $\varepsilon = 0,20$; $\gamma = 0,26$.

Il est bien évident que les termes du cinquième degré en ε et γ seront encore sensibles; en voici d'ailleurs quelques-uns que j'ai calculés :

		M.	A.	A'.	L.
ε_1^5	0	+14,78	-12,08	-0,56	-20,54
	2	+1,90	-0,94	-0,03	-2,39
	-2	+7,87	-10,57	-0,43	-11,30
	4	+0,13	-0,04	0,00	-0,16
	-4	+0,32	-1,96	+0,18	-0,55
	6	+0,01	0,00	0,00	+0,01
	-6	-0,02	+0,06	+0,05	-0,04
	8	0,00	0,00	0,00	0,00
	-8	+0,03	0,00	-0,02	+0,04

γ_1^6	0	0,00	0,00	0,00	-0,12
	2	0,00	0,00	0,00	-0,01
	-2	-0,01	0,00	+0,02	+0,11
	4	0,00	0,00	0,00	0,00
	-4	-0,01	+0,01	-0,01	0,00

		A''.	S.			A''.	S.
γ_1^5	0	+0,001	+0,053	$\gamma_1^4 \gamma_2$	0	-0,006	-0,328
	2	0,000	+0,004		2	-0,001	-0,022
	-2	+0,020	+0,027		-2	+0,031	+0,084
	4	0,000	0,000		4	0,000	0,000
	-4	0,000	-0,006		-4	-0,013	-0,036
	6	0,000	0,000		6	0,000	0,000
	-6	+0,002	+0,003		-6	0,000	-0,003

		A''.	S.	
$\gamma_1^3 \gamma_2^2$	0	0	-0,046	$h_{\gamma_1^3 \gamma_2^2} = +0,059$
	2	-0,008	-0,031	
	-2	-0,145	-0,168	
	4	0,000	-0,001	
	-4	-0,004	-0,020	
	6	0,000	0,000	
	-6	0,000	-0,002	

Le calcul devient trop compliqué pour que j'aie entrepris de déterminer complètement les termes du cinquième degré. J'ai essayé de calculer ceux qui sont indépendants de σ ; d'ailleurs, pour abréger le calcul, je n'ai considéré parmi les termes de degré moindre que 5 que ceux qui sont indépendants de σ . Voici les résultats obtenus; je les ai multipliés par la valeur du coefficient M_p où j'ai donné à ε la valeur 0,20 et à γ la valeur 0,265.

	M.	A.	A'.	L.	
ε_1^5	+0,004	-0,004	0,000	-0,007	
$\varepsilon_1^4 \varepsilon_2$	-0,004	+0,005	+0,001	+0,003	
$\varepsilon_1^3 \varepsilon_2^2$	0	-0,002	0,000	-0,002	$\mathcal{G}_{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2} = +0,004$
$\gamma_1^2 \varepsilon_1^3$	+0,001	0,000	-0,002	+0,001	
$\gamma_1^2 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2$	-0,020	+0,018	+0,004	+0,015	
$\gamma_1^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2^2$	0,000	-0,005	-0,028	+0,012	
$\gamma_1 \gamma_2 \varepsilon_1^3$	0,000	+0,001	-0,003	+0,007	
$\gamma_1 \gamma_2 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2$	0	-0,002	+0,012	-0,007	$\mathcal{G}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \gamma_1 \gamma_2} = 0,000$
$\gamma_2^2 \varepsilon_1^3$	+0,003	-0,005	-0,005	-0,003	
$\gamma_1^3 \varepsilon_1$	0,000	0,000	0,000	-0,002	
$\gamma_1^3 \varepsilon_2$	-0,001	0,000	+0,004	-0,005	
$\gamma_1^3 \gamma_2 \varepsilon_1$	0,000	0,000	-0,001	+0,003	
$\gamma_1^3 \gamma_2 \varepsilon_2$	-0,004	+0,001	0,000	+0,006	
$\gamma_1^2 \gamma_2^2 \varepsilon_1$	0,000	+0,001	-0,014	+0,008	$\mathcal{G}_{\gamma_1^2 \gamma_2^2} = +0,002$

	A''.		A''.
γ_1^5	0,000	$\gamma_1^2 \gamma_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2$	0 $h_{\gamma_1 \gamma_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2} = -0,005$
$\gamma_1^4 \gamma_2$	0,000	$\gamma_1 \gamma_2^2 \varepsilon_1^2$	+0,002
$\gamma_1^3 \gamma_2^2$	0,000 $h_{\gamma_1^2 \gamma_2^2} = +0,001$	$\gamma_1 \varepsilon_1^4$	+0,002
$\gamma_1^3 \varepsilon_1^2$	0,000	$\gamma_2 \varepsilon_1^4$	+0,002
$\gamma_1^3 \varepsilon_1 \varepsilon_2$	-0,009	$\gamma_1 \varepsilon_1^3 \varepsilon_2$	-0,002
$\gamma_1^3 \varepsilon_2^2$	+0,014	$\gamma_2 \varepsilon_1^3 \varepsilon_2$	+0,003
$\gamma_1^2 \gamma_2^2 \varepsilon_1$	0,000	$\gamma_1 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2$	0 $h_{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2} = +0,002$

Quoique le calcul soit un peu sommaire, puisque tous les termes en σ sont négligés, les vérifications par les L se font bien, de sorte que ces résultats peuvent être considérés comme exacts à une ou deux unités près du dernier ordre.

La valeur que j'ai adoptée pour m , $m = -0,172$, n'étant qu'une valeur approchée, il convient de calculer les dérivées par rapport à M des différents termes.

Ces dérivées s'obtiennent de la même façon que les termes eux-mêmes, à l'aide des équations obtenues en différentiant les équations primitives.

En désignant par δ les dérivées par rapport à m , les équations s'écrivent

$$\begin{aligned} & \left(f_{p,k}^2 - 1 + \frac{3}{2} m^2 \right) \delta M_{p,k} + \left(1 + \frac{m^2}{2} \right) \delta Q_{p,k} + \left(\frac{1}{2} f_{p,k}^2 + m^2 \right) \delta D_{p,k} \\ & + \frac{3}{2} m^2 \left(1 + \frac{m}{f_{p,k}} \right) \delta (A^2)_{p,k-2} + \frac{3}{2} m^2 \left(1 - \frac{m}{f} \right) \delta (A'^2)_{p,k+2} + \dots \\ & + M_{p,k} (2 f_{p,k} \delta f_{p,k} + 3 m) + m Q_{p,k} + (f_{p,k} \delta f_{p,k} + 2 m) D_{p,k} \\ & + \left[3 m \left(1 + \frac{m}{f_{p,k}} \right) + \frac{3}{2} m^2 \left(\frac{1}{f} - \frac{m \delta f}{f^2} \right)_{p,k} \right] (A^2)_{p,k-2} \\ & + \left[3 m \left(1 - \frac{m}{f_{p,k}} \right) + \frac{3}{2} m^2 \left(-\frac{1}{f} + \frac{m \delta f}{f^2} \right)_{p,k} \right] (A'^2)_{p,k+2} + \dots, \end{aligned}$$

et de même pour les deux autres; les équations sont les mêmes; il suffit d'y ajouter des termes calculés une fois pour toutes et qui dépendent des termes affectés des indices p, k , déjà calculés et de δf . On a, de même, par exemple,

$$\delta B_p = (A_0 - 1) \delta (M + L + \beta)_p + \delta \beta_p + \delta A_0 (M + L + \beta)_p.$$

Voici les résultats obtenus pour les termes de degré 0, 1 ou 2 :

		$\frac{dM}{dm}$	$\frac{dA}{dm}$	$\frac{dA'}{dm}$	$\frac{dL}{dm}$	$\frac{dg}{dm}$
I	0	-0,008	-0,007	-0,007	0	
	2	+0,082	-0,022	+0,187	-0,104	
	-2	+0,082	+0,187	-0,022	+0,104	
	4	+0,002	0,000	0,000	-0,002	
	-4	+0,002	0,000	0,000	+0,002	
	6	0,000	0,000	0,000	0,000	
	-6	0,000	0,000	0,000	0,000	
						$\frac{dg_0}{dm}$
E ₁	0	0	+0,12	-0,09	+0,10	+0,02
	2	-0,27	+0,09	-0,05	+0,35	
	-2	+0,91	+1,89	-0,31	+1,15	
	4	-0,01	0,00	0,00	+0,01	
	-4	+0,06	+0,01	-0,02	+0,09	
	6	0,00	0,00	0,00	0,00	
	-6	0,00	0,00	0,00	0,00	

		$\frac{dM}{dm}$	$\frac{dA}{dm}$	$\frac{dA'}{dm}$	$\frac{dL}{dm}$	$\frac{dg}{dm}$
ε_1^2	0	+0,6	-0,5	+1,0	-0,9	
	2	+0,8	-0,3	0,0	-1,0	
	-2	-1,0	-7,2	+2,4	-4,3	
	4	+0,1	0,0	0,0	-0,1	
	-4	+0,4	+0,1	-0,2	+0,6	
	6	0,0	0,0	0,0	0,0	
	-6	0,0	0,0	0,0	+0,1	
$\varepsilon_1 \varepsilon_2$	0	-0,2	+0,5	+0,5	0	
	2	-2,9	+1,5	-0,2	+3,8	
	-2	-2,9	-0,2	+1,5	-3,8	
	4	-0,4	+0,1	0,0	+0,5	
	-4	-0,4	0,0	+0,1	-0,5	
	6	0,0	0,0	0,0	0,0	
	-6	0,0	0,0	0,0	0,0	
γ_1^2	0	+0,5	-0,2	+1,1	-0,7	
	2	0,0	0,0	0,0	+0,1	
	-2	-0,5	-2,4	+0,9	-1,6	
	4	0,0	0,0	0,0	0,0	
	-4	0,0	-0,1	0,0	-0,1	
$\gamma_1 \gamma_2$	0	0,0	0,0	0,0	0	
	2	-0,1	+0,1	0,0	-0,1	
	-2	-0,1	0,0	+0,1	+0,1	
	4	0,0	0,0	0,0	0,0	
	-4	0,0	0,0	0,0	0,0	
ε_1'	0	-0,3	-2,0	+1,5	-1,8	
	2	0,0	0,0	-0,2	+0,1	
	-2	+0,1	+0,5	0,0	+0,1	
	4	0,0	0,0	0,0	0,0	
	-4	0,0	0,0	0,0	0,0	
$\frac{5}{16} m^2 \omega^{-\frac{1}{3}} \alpha$	1	+30	-17	+80	-49	
	-1	+30	+80	-17	+49	
	3	+7	-1	+11	-8	
	-3	+7	+11	-1	+8	
	5	0	0	0	0	
	-5	0	0	0	0	

Pour les termes dépendant de la parallaxe, j'ai écrit, non la dérivée du

coefficient de $\frac{5}{16} m^2 \omega^{-\frac{1}{3}} \alpha$, mais, pour M, par exemple,

$$\frac{1}{\frac{5}{16} m^2 \omega^{-\frac{1}{3}} \alpha} \frac{d}{dm} \left(\frac{5}{16} m^2 \omega^{-\frac{1}{3}} \alpha M \right) = \frac{dM}{dm} + \frac{M}{\alpha m^2 \omega^{-\frac{1}{3}}} \frac{d}{dm} \left(\alpha m^2 \omega^{-\frac{1}{3}} \right),$$

en considérant $\alpha = \frac{a}{a'} = km^{\frac{2}{3}}$ comme une fonction de m .

De cette façon, je pourrai dans la suite traiter ce terme exactement comme les autres.

	$\frac{d\Lambda''}{dm}$	$\frac{dS}{dm}$	$\frac{dh_1}{dm}$		$\frac{d\Lambda''}{dm}$		$\frac{d\Lambda''}{dm}$
γ_1 0	0	0,00	+0,27	$\gamma_1 \varepsilon_1$ 0	-0,1	$\gamma_1 \varepsilon_2$ 0	+1,2
2	-0,02	-0,10		2	+0,1	2	-0,3
-2	-0,08	-0,17		-2	+2,0	-2	+0,2
4	0,00	0,00		4	0,0	4	0,0
-4	0,00	0,00		-4	0,0	-4	0,0

CHAPITRE III.

DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS DE L'ORBITE DU HUITIÈME SATELLITE DE JUPITER.

Il s'agit maintenant de déterminer les éléments de l'orbite du huitième satellite de Jupiter à l'aide des observations.

Toutefois, j'ai jugé inutile de m'adresser aux observations elles-mêmes. En effet, les positions calculées par MM. Cowell, Crommelin, Davidson concordent avec les observations à quelques secondes près, au plus. Or, la valeur considérable des termes négligés, *a priori*, et les résultats que je vais développer, *a posteriori*, indiquent que la précision que je peux obtenir est moindre que celle des astronomes anglais; il me suffit donc de chercher à représenter aussi exactement que possible les coordonnées qu'ils ont trouvées par quadratures mécaniques.

Pour tous ces calculs, je me suis servi des coordonnées rectangulaires; elles sont plus commodes pour les calculs des moyennes que j'ai dû effectuer pour obtenir des valeurs assez approchées des éléments.

Les coordonnées x, y, z sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{x}{a\omega^{-\frac{1}{3}}} &= \Sigma A_{p,k} \alpha^q \varepsilon^{r_1+r_2} \varepsilon'^{r'_1+r'_2} \gamma^{s_1+s_2} \cos[N + kK + (r_1 - r_2)(N - G) \\ &\quad + (r'_1 - r'_2)(N' - \varpi') + (s_1 - s_2)(N - H)], \\ \frac{y}{a\omega^{-\frac{1}{3}}} &= \Sigma A_{p,k} \alpha^q \varepsilon^{r_1+r_2} \varepsilon'^{r'_1+r'_2} \gamma^{s_1+s_2} \sin[N + kK + (r_1 - r_2)(N - G) \\ &\quad + (r'_1 - r'_2)(N' - \varpi') + (s_1 - s_2)(N - H)], \\ \frac{z}{a\omega^{-\frac{1}{3}}} &= \Sigma A''_{p,k} \alpha^q \varepsilon^{r_1+r_2} \varepsilon'^{r'_1+r'_2} \gamma^{s_1+s_2} \sin[kK + (r_1 - r_2)(N - G) \\ &\quad + (r'_1 - r'_2)(N' - \varpi') + (s_1 - s_2)(N - H)].\end{aligned}$$

En réalité, les termes A'' étant conjugués deux à deux, on ne calcule que la moitié de $\frac{z}{a\omega^{-\frac{1}{3}}}$.

Ces coordonnées sont rapportées au plan de l'orbite de Jupiter; il convient donc de transformer les coordonnées de MM. Cowell, Crommelin et Davidson qui sont rapportées au plan de l'équateur terrestre. Désignons par x', y', z' les coordonnées rapportées à l'équateur terrestre, par x, y, z celles rapportées au plan de l'orbite de Jupiter; je prends comme axe des x l'intersection de ces deux plans et les formules de transformation sont :

$$\begin{aligned}x &= +0,99838x' + 0,05701y', \\ y &= -0,05237x' + 0,91718y' + 0,39504z', \\ z &= +0,02252x' - 0,39439y' + 0,91867z'.$$

En prenant le centre de gravité des points où l'orbite rencontre le plan des xy en avril 1908, décembre 1908, avril 1910, décembre 1910, avril 1912, novembre 1912, mars 1914 et décembre 1914, je suis amené à choisir $\theta = +110^\circ,3$ ⁽¹⁾; en prenant la moyenne des périjoves d'octobre 1908, novembre 1910, octobre 1912, novembre 1914, et des apojoyes de décembre 1909, novembre 1911, septembre 1913, janvier 1916, je suis amené à choisir $\varpi = -31$ ⁽¹⁾.

(1) Voir la fin du Chapitre I pour l'interprétation de ces quantités.

Je choisis comme origine des temps le 3 novembre 1911, date du passage à l'apojove, et j'adopte comme constantes provisoires :

$$\omega = -31^{\circ}, \quad \omega' = +51^{\circ}, \quad \varpi = -31^{\circ}, \quad \theta = +110^{\circ}, 3, \quad \varepsilon = +0,215,$$

et je vais chercher à déterminer γ par l'étude du maximum de $|z'|$.

z a un minimum le 29 juin 1911, qui est $-0,104$, d'autre part, d'après mes formules, le minimum voisin de cette date est

$$2a\omega^{-\frac{1}{3}}(-1,202\gamma + 0,11\gamma^3);$$

d'où

$$\gamma = +0,277;$$

de même, pour le 28 août 1912,

$$+0,058 = 2a\omega^{-\frac{1}{3}}(+0,733\gamma - 0,03\gamma^3);$$

d'où

$$\gamma = +0,253;$$

j'adopte la moyenne

$$\gamma = +0,265.$$

Je calcule maintenant ε par le même procédé, à l'aide des M. Je trouve, d'après M. Crommelin,

$$1911. \text{ nov. } 4. \dots \quad \rho = 1,448 \quad M = +0,3751$$

$$1910. \text{ nov. } 17. \dots \quad \rho = 0,572 \quad M = -0,5537$$

Les maximum et minimum de M voisins de ces dates sont, d'autre part,

$$2(0,006 + 0,969\varepsilon - 1,02\varepsilon^2 + 2,26\varepsilon^3 - 3,9\varepsilon^4 + 2,9\varepsilon^5)$$

et

$$2(0,009 - 1,091\varepsilon - 1,43\varepsilon^2 - 2,24\varepsilon^3 - 4,1\varepsilon^4 - 5,5\varepsilon^5),$$

d'où

$$\varepsilon = +0,208 \quad \text{et} \quad +0,192.$$

Je prends la moyenne

$$\varepsilon = +0,200.$$

Avec ces valeurs de ε et γ je peux calculer les coefficients des sinus et

cosinus qui figurent dans x et y en y adjoignant

$$\frac{5}{16} \omega^{-\frac{1}{3}} m^2 \alpha = +0,000281, \quad \varepsilon' = +0,0483.$$

J'obtiens les Tableaux suivants de valeurs : je désigne chaque groupe de termes par deux indices ou par trois indices ; quand il n'y en a que deux, le premier doit être considéré comme sous-entendu et égal à 0. Le premier désigne $r'_1 - r'_2$, le second $r_1 - r_2$ et le dernier $s_1 - s_2$.

J'ai tenu compte dans ces Tableaux des termes du cinquième degré par rapport à ε et γ calculés en entier ; les termes en α^2 n'y figurent pas ; ils sont très petits si l'on s'en rapporte aux développements en puissances de m , puisqu'ils sont de l'ordre de $m^2 \alpha^2 = 0,00002$. J'ai aussi négligé tous les termes en σ^8 et σ^{-8} , dont aucun n'est important.

TABLEAU DES A.

	0, 0.	1, 0.	-1, 0.	2, 0.	-2, 0.
0	+0,84468	-0,16196	+0,56893	+0,04597	+0,03794
-2	-0,01403	+0,01020	+0,02635	-0,00553	-0,01440
2	-0,03013	-0,08967	+0,00336	+0,05131	-0,00082
4	+0,00138	+0,00048	-0,00166	-0,00039	+0,00169
-4	+0,00022	-0,00046	+0,00004	+0,00097	-0,00002
6	+0,00010	+0,00002	-0,00008	-0,00002	-0,00010
-6	0,00000	0,00000	0,00000	-0,00001	0,00000
	0, 2.	0, -2.	3, 0.	-3, 0.	1, 2.
0	-0,03317	+0,05474	-0,02250	-0,00259	-0,00087
2	-0,00099	-0,00339	-0,00092	+0,00262	-0,00002
-2	-0,00406	-0,00123	-0,01680	-0,00003	-0,01336
4	-0,00003	+0,00014	-0,00003	-0,00089	0,00000
-4	+0,00015	-0,00004	-0,00084	0,00000	-0,00087
6	0,00000	+0,00004	0,00000	+0,00009	0,00000
-6	0,00000	0,00000	+0,00001	0,00000	+0,00001
	-1, -2.	-1, 2.	1, -2.	4, 0.	-4, 0.
0	-0,01371	+0,05339	-0,12154	+0,00902	+0,00061
2	+0,00313	+0,00075	-0,00136	+0,00053	+0,00016
-2	-0,00016	+0,03117	+0,00180	+0,00724	+0,00002
4	-0,00087	+0,00001	+0,00004	+0,00002	+0,00013
-4	0,00000	-0,00003	+0,00003	+0,00088	0,00000
6	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	-0,00008
-6	0,00000	0,00000	0,00000	-0,00002	0,00000

TABLEAU DES A.

	2, 2.	-2, -2.	-2, 2.	2, -2.	0, 4.
0	+0,00061	+0,00424	+0,01043	+0,01194	0,00000
2	+0,00003	+0,00083	+0,00534	+0,00203	0,00000
-2	+0,00630	+0,00011	+0,00003	-0,00057	+0,00011
4	0,00000	+0,00038	+0,00015	+0,00001	0,00000
-4	+0,00100	0,00000	+0,00001	+0,00010	+0,00014
6	0,00000	-0,00007	+0,00001	0,00000	0,00000
-6	-0,00002	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

	0, -4.	1, 0, 0.	-1, 0, 0.	1, 1, 0.	-1, -1, 0.
0	+0,00006	+0,00369	-0,00444	-0,00560	+0,00328
2	+0,00045	+0,00036	-0,00107	0,00000	+0,00193
-2	0,00000	-0,00304	+0,00106	-0,01081	0,00000
4	+0,00015	+0,00002	-0,00010	0,00000	+0,00010
-4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
6	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
-6	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

	-1, 1, 0.	1, -1, 0.	1, 2, 0.	-1, -2, 0.	-1, 2, 0.
0	+0,00357	+0,00174	+0,00272	+0,00015	-0,00154
2	-0,00019	-0,00116	+0,00004	-0,00160	+0,00015
-2	+0,00589	+0,00019	+0,00648	0,00000	-0,00116
4	0,00000	0,00000	0,00000	+0,00021	0,00000
-4	0,00000	0,00000	+0,00012	0,00000	-0,00002

	1, -2, 0.	1, 0, 2.	-1, 0, -2.	-1, 0, 2.	1, 0, -2.
0	-0,00031	+0,00010	-0,00102	+0,00003	+0,00007
2	-0,00075	0,00000	-0,00132	0,00000	+0,00017
-2	0,00000	+0,00336	0,00000	-0,00092	0,00000
4	-0,00014	0,00000	-0,00003	0,00000	0,00000
-4	0,00000	+0,00003	0,00000	-0,00003	0,00000

	2, 0, 0.	-2, 0, 0.
0	-0,00007	+0,00007
2	0,00000	+0,00002
-2	-0,00025	0,00000
4	0,00000	0,00000
-4	0,00000	0,00000

TABLEAU DES A.

	0, 0.	1, 0.	-1, 0.	2, 0.	-2, 0.
1	+0,00072	-0,00053	-0,00213	+0,00029	+0,00001
-1	+0,00097	+0,00320	-0,00022	-0,00116	+0,00002
3	-0,00017	-0,00003	+0,00017	+0,00003	+0,00024
-3	-0,00016	-0,00069	+0,00005	-0,00168	-0,00001
5	-0,00001	0,00000	+0,00001	0,00000	+0,00002
-5	0,00000	-0,00001	0,00000	0,00000	0,00000

	0, 2.	0, -2.	1, 0, 0.	-1, 0, 0.
1	0,00000	+0,00352	+0,00128	-0,00016
-1	-0,00152	+0,00004	+0,00054	-0,00378
3	0,00000	+0,00022	+0,00001	0,00000
-3	-0,00105	0,00000	-0,00005	0,00000
5	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
-5	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

TABLEAU DES A".

	0, 1.	1, 1.	1, -1.	2, 1.	2, -1.
0	+0,24380	-0,04644	-0,17349	+0,01620	+0,03499
2	-0,00479	+0,00263	+0,00296	+0,00040	-0,00073
-2	+0,01284	-0,02548	-0,00731	+0,00673	+0,00520
4	-0,00013	+0,00012	-0,00012	+0,00001	-0,00002
-4	-0,00022	+0,00070	+0,00043	-0,00042	-0,00039
6	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
-6	0,00000	-0,00001	0,00000	+0,00002	-0,00001

	0, 3.	3, 1.	3, -1.	1, 3.	-1, 3.
0	+0,00023	-0,00588	-0,00702	-0,00022	+0,01403
2	0,00000	-0,00024	+0,00023	0,00000	+0,00019
-2	+0,00504	-0,00034	-0,00409	-0,00305	+0,00621
4	0,00000	-0,00001	+0,00002	0,00000	0,00000
-4	-0,00017	-0,00001	+0,00032	+0,00019	0,00000
6	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
-6	0,00000	-0,00002	-0,00002	0,00000	0,00000

	1, 0, 1.	-1, 0, 1.	1, 1, 1.	-1, 1, 1.	1, -1, 1.
0	+0,00039	-0,00026	-0,00087	+0,00054	-0,00143
2	0,00000	+0,00013	0,00000	-0,00005	-0,00038
-2	+0,00065	-0,00039	-0,00251	+0,00108	-0,00018
4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
-4	0,00000	0,00000	+0,00003	0,00000	0,00000

TABLEAU DES A'' .

	1, 1, -1.		0, 1.		1, 1.		1, -1.
0	-0,00161		1	+0,00033		-0,00016	-0,00153
2	-0,00005		-1	-0,00132		-0,00036	-0,00046
-2	-0,00061		3	+0,00001		-0,00001	+0,00001
4	0,00000		-3	+0,00003		+0,00007	-0,00004
-4	-0,00003		5	0,00000		0,00000	0,00000
			-5	0,00000		0,00000	0,00000

$$g = -0,00261,$$

$$h = -0,02278.$$

TABLEAU DES $\frac{dA}{dm}$.

	0, 0.	1, 0.	-1, 0.	2, 0.	-2, 0.	0, 2.
0	+0,013	+0,024	-0,018	-0,016	+0,040	-0,014
2	+0,045	+0,018	-0,062	-0,012	+0,096	0,000
-2	+0,179	+0,378	-0,010	-0,288	0,000	-0,168
4	+0,004	0,000	-0,004	0,000	-0,008	0,000
-4	0,000	+0,002	0,000	+0,004	0,000	-0,007
	0, -2.	0, 0, 0.	-1, 0, 0.			0, 0.
0	+0,056	-0,096	+0,072		1	-0,004
2	+0,056	0,000	0,000		-1	+0,022
-2	0,000	+0,024	-0,010		3	0,000
4	0,000	0,000	0,000		-3	+0,003
-4	0,000	0,000	0,000			

TABLEAU DES $\frac{dA''}{dm}$.

	0, 1.	1, 1.	1, -1.
0	0	-0,005	-0,064
2	-0,005	+0,005	-0,011
-2	-0,021	+0,106	+0,016
4	0,000	0,000	0,000
-4	0,000	0,000	0,000

$$\frac{dg}{dm} = +0,02,$$

$$\frac{dh}{dm} = +0,27.$$

J'ai calculé aussi les $\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\Lambda}{d\varepsilon}$ et $\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\Lambda''}{d\varepsilon}$, les $\frac{1}{\gamma} \frac{d\Lambda}{d\gamma}$ et $\frac{1}{\gamma} \frac{d\Lambda''}{d\gamma}$. Il est inutile de transcrire ici ces résultats.

Je vais essayer maintenant de déterminer des valeurs approchées des autres constantes. Je cherche d'abord ω en prenant comme origine des temps 1908 janvier 28,0 (temps moyen de Paris), date initiale des calculs de MM. Cowell, Crommelin et Davidson. Pour cela, je remarque que m est voisin de $-\frac{1}{6}$ de sorte que, quand N diminue de 360° , N' augmente de 60° , $2K$ de 120° . Si donc on considère trois dates auxquelles correspondent les valeurs de N : $N - 2\pi$, N , $N + 2\pi$, la moyenne des x, y, z, r ou λ pour ces trois dates sera à peu près indépendante des termes en $\sigma^2, \sigma^{-2}, \sigma^4, \sigma^{-4}$. En plus des termes indépendants de σ , il n'y figurera que les termes en σ^6, σ^{-6} et α , tous très petits.

Si l'on prend douze dates équidistantes, l'intervalle entre deux d'entre elles consécutives étant le quart d'une révolution moyenne, la moyenne des z, r ou λ à ces douze dates ne comprendra, outre les termes en $\sigma^6, \sigma^{-6}, \alpha$ et quelque termes en ε' , tous petits, que des termes pour lesquels $k = 0$ et $s_1 - s_2 + r_1 - r_2 = 0$ ou 4.

Adoptant provisoirement pour durée de la révolution moyenne, 745¹/₆, je choisis les douze dates : 1908 novembre 1, 1909 mai 7, ..., 1914 juin 14; je calcule pour chacune d'elles, d'après Crommelin, $v - nt$ et j'adopte pour valeur de ω la valeur 273⁰/₀ qui est la moyenne de ces douze $v - nt$. D'après l'ordre de grandeur des termes non éliminés ou incomplètement éliminés, l'erreur commise ne dépasse sans doute pas 2⁰ ou 3⁰.

Si je calcule pour les mêmes dates les $\log r$ et tiens compte cette fois des $M_{0,0}, M_{2,2}, M_{2,-2}, M_{4,0}, M_{0-4}$ non éliminés, je trouve

$$\text{moy. des } \log r \text{ de Crommelin} = M \text{ non éliminés} + \log a - \frac{1}{3} \log \left(1 + \frac{m^2}{2} \right),$$

c'est-à-dire

$$1,2096 = +0,0121 + \log a - 0,0022;$$

d'où je tire

$$a = +0,1584, \quad \text{ce qui donne} \quad m = -0,172.$$

Prenons maintenant les moyennes de ces $\log r$ en les groupant par trois dates équidistantes d'une révolution; la comparaison de ces quatre

moyennes nous donne, en tenant compte des principales inégalités M et ayant égard à leurs périodes respectives, les trois équations suivantes où $N - G$ et $N - H$ sont relatifs à la date 1910 novembre 17,0 :

$$\begin{aligned} & -0,110 \cos 2(N - G) + 0,065 \cos 2(N - H) = -0,104, \\ & + 0,376 \cos (N - G) + 0,048 \cos 3(N - G) \\ -0,113 \cos [-(N - G) + 2(N - H)] + 0,003 \cos [(N - G) + 2(N - H)] & = -0,396, \\ & -0,376 \sin (N - G) + 0,048 \sin 3(N - G) \\ + 0,113 \sin [-(N - G) + 2(N - H)] + 0,003 \sin [(N - G) + 2(N - H)] & = -0,051. \end{aligned}$$

Elles donnent, si l'on prend $\omega = + 273^\circ$,

$$\varpi = -51^\circ, \quad \theta = +93^\circ \quad (\text{le 17 novembre 1910}).$$

J'ai voulu avoir de ces constantes une détermination un peu plus précise. Pour cela, j'ai considéré trois révolutions successives ayant pour centres les dates : 16 novembre 1910, 30 novembre 1912 et 16 décembre 1914. Les x, y, z moyens pour l'ensemble de ces trois révolutions sont à peu près indépendants de tous les termes A et A'', sauf ceux à très longues périodes (et ceux de la parallaxe que je néglige). En admettant les valeurs 0,20 et 0,265 pour ε et γ et la valeur 0,1577 pour $\alpha\omega^{-\frac{1}{3}}$, j'obtiens ainsi les trois équations

$$\begin{aligned} 0,569 \cos \varpi - 0,122 \cos (2\theta - \varpi) &= 0,449, \\ 0,569 \sin \varpi - 0,122 \sin (2\theta - \varpi) &= -0,301, \\ 0,346 \sin (\varpi - \theta) &= -0,184; \end{aligned}$$

d'où

$$\varpi = -45^\circ,8, \quad \theta = +102^\circ,0.$$

On pourrait même en tirer une correction de ε , mais elle aurait peu de valeur.

L'écart entre les deux valeurs de θ est assez considérable. Pour arriver à un résultat plus certain je calcule avec $\theta = 97^\circ$ la valeur de z pour les deux dates 28 janvier 1908 et 15 février 1909. Je trouve

$$-0,041 \quad \text{au lieu de} \quad -0,050 \quad \text{d'après Crommelin,}$$

et

$$-0,058 \quad \quad \quad -0,053$$

Ceci me conduit à modifier θ et j'adopte finalement les constantes suivantes : origine des temps 1908 janvier 28,0 (t. m. P.); moyen mouvement — 1739", 13 par jour; durée de la révolution 745¹, 20.

$$\begin{aligned} a &= 0,15840, & a\omega^{-\frac{1}{3}} &= 0,15762; \\ \omega &= 273^{\circ} 0' 0'', & \varpi &= -45^{\circ} 17' 13'', 2; \\ \theta &= +89^{\circ} 13' 8'', 4, & \omega' &= -59^{\circ} 37'; \\ \varpi' &= +189^{\circ} 42'. \end{aligned}$$

A l'aide de ces constantes j'ai calculé les coordonnées rectangulaires d'abord pour trois positions qui correspondent à des époques d'observations et pour lesquelles l'erreur entre les observations et les coordonnées de M. Crommelin ne dépassent pas quelques secondes d'arc.

Ces trois positions sont celles de :

1908 janvier 28,0 (les observations vont de janvier à mai);

1909 février 15,0 (les observations vont de janvier à février);

1910 mars 6,0 (les observations vont de janvier à avril).

Puis, les observations de 1912 qui ont été récemment publiées ⁽¹⁾ étant bien représentées par les coordonnées de M. Crommelin, j'ai fait le calcul pour le 15 juin 1912, qui est à peu près au milieu de la période d'observations, de façon à déterminer le moyen mouvement avec le plus d'exactitude possible.

Voici les résultats que j'ai obtenus comparés à ceux de M. Crommelin :

Je n'ai pas tenu compte des termes du cinquième degré, sauf ceux en $\gamma_1^4\gamma_2$ et $\gamma_1^3\gamma_2^2$ qui ont été calculés en entier et figurent dans $A''_{0,3}$ et $A''_{0,4}$ du Tableau ci-dessus.

1908 janv. 28,0.....	$x = +0,0961$	au lieu de	$+0,1048$
	$y = -0,1648$		$-0,1633$
	$z = -0,0556$		$-0,0512$
1909 févr. 15,0.....	$x = +0,0862$	au lieu de	$+0,0778$
	$y = +0,1135$		$+0,1105$
	$z = -0,0524$		$-0,0525$

(1) *M. N.*, juillet 1912.

1910 mars 6,0.....	$x = + 0,0797$	au lieu de	$+ 0,0836$
	$y = - 0,1883$		$- 0,1877$
	$z = + 0,0200$		$- 0,0175$
1912 juin 15,0.....	$x = + 0,0011$	au lieu de	$+ 0,0068$
	$y = - 0,1503$		$- 0,1467$
	$z = - 0,0352$		$+ 0,0385$

Il y a des différences notables. Est-il possible de les diminuer en modifiant les constantes ? Il faut pour s'en rendre compte calculer les dérivées des coordonnées x, y, z par rapport aux éléments. La difficulté est qu'on ne peut, pour ce calcul, utiliser simplement les formules différentielles du mouvement elliptique. En effet les perturbations sont si considérables qu'elles sont changées d'une façon notable, si l'on modifie les constantes.

J'ai donc dû calculer $\frac{dx}{d\varepsilon}, \frac{dx}{d\gamma}, \frac{dx}{d\omega}, \dots$, à l'aide des formules complètes.

x, y, z dépendent :

1° de m : par l'intermédiaire des $A_{p,h}$ et des $A''_{p,h}$, fonctions de m dont les dérivées sont déjà calculées; par l'intermédiaire de n qui figure dans

$$N = nt + \omega;$$

par l'intermédiaire de g et h qui sont fonctions de m , et figurent dans G et H sous les signes sinus et cosinus; enfin par l'intermédiaire du facteur $a\omega^{-\frac{1}{3}}$ dans les formules

$$x = \frac{a\omega^{-\frac{1}{3}}}{2} (A e^{iN} + A' e^{-iN}), \quad \dots,$$

si l'on veut conserver la même valeur $\frac{4}{1047,3}$ pour la masse de Jupiter.

2° de ε et γ , directement et par l'intermédiaire de g et h .

3° de ω , par l'intermédiaire de N qui figure sous les signes sinus et cosinus.

4° de ϖ et θ , par l'intermédiaire de G et H qui figurent sous les signes sinus et cosinus.

Voici les résultats obtenus : les Tableaux ci-dessous indiquent les valeurs numériques, pour les quatre époques considérées, des dérivées par rapport

à m , ω , ε , γ , ϖ , θ de $\frac{x}{a}\omega^{\frac{1}{3}}$, $\frac{y}{a}\omega^{\frac{1}{3}}$, $\frac{z}{2a}\omega^{\frac{1}{3}}$; les dérivées par rapport à ε et γ sont respectivement multipliées par $\frac{1}{\varepsilon}$ et $\frac{1}{\gamma}$; et dans la colonne des dérivées par rapport à m j'ai écrit non $\frac{d}{dm}\left(\frac{x}{a}\omega^{\frac{1}{3}}\right)$, mais $\frac{1}{a\omega^{\frac{1}{3}}}\frac{dx}{dm}$, ..., en tenant compte, comme je l'ai dit, de la variation de a .

1908 JANVIER 28,0.

	m .	ω .	ε .	γ .	ϖ .	θ .
$x...$	-0,02	+0,603	+0,543	+0,158	+0,607	+0,026
$y...$	+0,04	+0,211	-0,020	+0,203	+0,487	+0,020
$\frac{1}{2}z...$	+0,01	-0,208	-0,060	-0,265	-0,138	+0,303

1909 FÉVRIER 15,0.

	m .	ω .	ε .	γ .	ϖ .	θ .
$x...$	+0,15	-0,847	+0,480	+0,131	+0,692	-0,334
$y...$	-0,11	+0,408	-0,399	+0,127	+0,071	+0,172
$\frac{1}{2}z...$	-0,05	+0,290	-0,196	-0,229	-0,160	-0,134

1910 MARS 6,0.

	m .	ω .	ε .	γ .	ϖ .	θ .
$x...$	-0,25	+0,603	+0,684	+0,200	+0,502	-0,113
$y...$	0,00	+0,128	-0,130	+0,258	+0,315	+0,105
$\frac{1}{2}z...$	+0,09	-0,247	-0,043	-0,125	-0,126	+0,366

1912 JUIN 15,0.

	m .	ω .	ε .	γ .	ϖ .	θ .
$x...$	-0,64	+0,835	+0,651	+0,200	+0,588	-0,393
$y...$	+0,51	-0,611	-0,204	+0,200	+0,177	+0,270
$\frac{1}{2}z...$	+0,12	-0,157	-0,064	+0,085	-0,161	+0,341

Est-il légitime de chercher à perfectionner les constantes à l'aide de ces données en employant la méthode des moindres carrés? Il me paraît que oui. Si les différences entre les positions calculées et observées ne sont pas des erreurs d'observations, elles ont le même caractère au point de vue du calcul des probabilités, car elles représentent un grand nombre de termes

omis, les termes de degré 5 ou plus par rapport à ε , γ , $\varepsilon'^{\frac{1}{2}}$, $\alpha^{\frac{1}{2}}$ ⁽¹⁾; ces termes sont tous petits probablement, et de signes quelconques; pour chacune des quatre positions considérées ils sont multipliés par différents sinus et cosinus, de signes et de valeurs *a priori* quelconques.

J'ai donc, à l'aide des valeurs obtenues pour les dérivées et des différences entre mes coordonnées et celles de M. Crommelin, formé et résolu les équations normales en donnant le même poids aux équations résultant de la comparaison des x , des y et des $\frac{1}{2}z$. Je trouve qu'il y a lieu alors de donner aux éléments que j'ai adoptés les corrections suivantes :

$$\delta m = + 0,00067,$$

$$\delta \omega = + 0,0571,$$

$$\frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon} = + 0,0545,$$

$$\frac{\delta \gamma}{\gamma} = - 0,0070,$$

$$\delta \varpi = - 0,0114,$$

$$\delta \theta = + 0,0539,$$

ou encore

$$\delta m = + 0,00067,$$

$$\delta \omega = + 3^{\circ} 15',$$

$$\delta \varepsilon = + 0,0109,$$

$$\delta \gamma = - 0,0018.$$

$$\delta \varpi = - 39',$$

$$\delta \theta = + 3^{\circ} 5',$$

et les résidus T — C deviennent

	1908 janv. 28.	1909 févr. 15.	1910 mars 6.	1912 juin 15.
$x \dots$	+0,0001	+0,0023	+0,0027	—0,0038
$y \dots$	—0,0003	+0,0033	—0,0005	—0,0036
$\frac{1}{2}z \dots$	—0,0013	—0,0001	+0,0005	+0,0008

Il n'y a pas lieu de refaire le calcul en tenant compte des termes du

(1) Il faudrait y ajouter, pour être complet, l'influence des autres satellites de Jupiter et celle de Saturne; mais je les crois bien petites vis-à-vis des termes négligés dans la théorie des perturbations solaires.

second ordre par rapport à ces corrections. Voici, en effet, les résultats que j'ai obtenus en calculant l'influence sur les valeurs de x , y , z aux quatre dates considérées des termes en δm^2 , $\delta m \delta \omega$, ... :

	1908.	1909.	1910.	1912.
$x...$	—0,0004	—0,0003	—0,0003	—0,0002
$y...$	+0,0001	—0,0002	—0,0001	0,0000
$z...$	+0,0002	0,0000	+0,0001	+0,0003

Ces corrections sont trop petites par rapport aux résidus pour qu'il soit utile de calculer la correction des éléments qu'elles entraîneraient.

Quant aux termes du cinquième degré en ε et γ que j'ai calculés pour $k=0$, ils donnent :

	1908 janv. 28.	1909 févr. 15.	1910 mars 6.	1912 juin 15.
$x...$	+0,0029	+0,0002	—0,0016	—0,0060
$y...$	+0,0003	0,0000	+0,0016	—0,0006
$z...$	—0,0035	+0,0032	—0,0050	+0,0044

Ces résultats paraissent inconciliables avec les observations; et si l'on calculait de nouveau les éléments en en tenant compte, on aurait des résidus beaucoup plus considérables. Il est possible que ces termes soient inexacts par suite de la façon dont je les ai calculés; il me paraît plus probable que nous nous trouvons en présence d'un de ces cas sur lesquels Poincaré a insisté dans ses *Méthodes nouvelles* et où l'on obtient avec des séries divergentes, une certaine convergence pratique, à condition de ne pas pousser le calcul au delà d'un certain ordre.

Les quatre époques que j'ai choisies et qui m'étaient imposées par les observations, présentent l'inconvénient de se trouver distantes les unes des autres d'un nombre entier de demi-révolutions. Il peut par suite y exister des termes ayant pour période une demi-révolution ou une révolution entière dont l'influence n'est nullement éliminée dans le calcul précédent des moindres carrés.

C'est pour parer à cet inconvénient et aussi pour m'assurer que mes formules ne s'écartaient pas trop dans l'ensemble des résultats de M. Crommelin que j'ai entrepris un autre genre de calcul : le calcul de la moyenne

des positions du huitième satellite de Jupiter pendant une révolution ou une fraction de révolution.

Les intervalles que j'ai considérés ont pour centres ou pour limites les époques déjà considérées, ce qui m'a permis d'utiliser les calculs déjà faits, à l'aide de formules telles que les suivantes où θ est une fraction simple :

$$\int_{\alpha-\theta\pi}^{\alpha+\theta\pi} \cos[\lambda N + \mu] dN = \frac{2}{\lambda} \sin \lambda \theta \pi \cos(\lambda \alpha + \mu),$$

$$\int_{\alpha-\theta\pi}^{\alpha} \cos(\lambda N + \mu) dN - \int_{\alpha}^{\alpha+\theta\pi} \cos(\lambda N + \mu) dN = \frac{4}{\lambda} \sin^2 \frac{\lambda \theta \pi}{2} \sin(\lambda \alpha + \mu);$$

de cette façon je n'ai eu qu'à multiplier les termes $A_{p,k} \sin$ ou $A_{p,k} \cos$ déjà calculés par les facteurs $\frac{\sin \lambda \theta \pi}{\lambda}$ ou $\frac{1}{\lambda} \sin^2 \frac{\lambda \theta \pi}{2}$, faciles à réduire en Tables.

J'ai choisi les intervalles de temps suivants :

- 1° La révolution qui a pour centre la date 1909 février 15,0;
- 2° La demi-révolution qui a pour centre la date 1909 février 15,0;
- 3° La révolution qui a pour centre la date 1910 mars 6,0;
- 4° La différence entre les deux moitiés de la révolution qui a pour centre la date 1910 mars 6,0;
- 5° La différence entre les deux révolutions, dont l'une commence et dont l'autre finit à cette même date 1910 mars 6,0.

Voici les résultats obtenus d'une part avec mes formules, d'autre part en prenant les moyennes des positions données par M. Crommelin :

- 1° Moyenne des positions pendant la révolution qui a pour milieu 1909 février 15,0 :

$x = + 0,0637$	au lieu de	$+ 0,0643$ d'après Crommelin
$y = - 0,0461$		$- 0,0476$
$z = - 0,0337$		$- 0,0325$

- 2° Moyenne des positions pendant la demi-révolution qui a pour milieu 1909 février 15,0 :

$x = + 0,0602$	au lieu de	$+ 0,0560$
$y = + 0,0500$		$+ 0,0469$
$z = - 0,0341$		$- 0,0355$

3° Moyenne des positions pendant la révolution qui a pour milieu 1910 mars 6,0 :

$$\begin{array}{lll} x = + 0,0680 & \text{au lieu de} & + 0,0687 \\ y = - 0,0526 & & - 0,0554 \\ z = - 0,0323 & & - 0,0304 \end{array}$$

4° Moyenne des positions pendant la demi-révolution qui finit le 1910 mars 6,0 moins moyenne des positions pendant la demi-révolution qui commence le 1910 mars 6,0 :

$$\begin{array}{lll} x = + 0,1483 & \text{au lieu de} & + 0,1495 \\ y = - 0,0182 & & - 0,0120 \\ z = - 0,0918 & & - 0,0884 \end{array}$$

5° Moyenne des positions pendant la révolution qui finit le 1910 mars 6,0 moins moyenne des positions pendant la révolution qui commence le 1910 mars 6,0 :

$$\begin{array}{lll} x = - 0,0087 & \text{au lieu de} & - 0,0107 \\ y = + 0,0132 & & + 0,0148 \\ z = + 0,0005 & & - 0,0015 \end{array}$$

Tous ces calculs sont effectués avec les valeurs primitives des éléments de l'orbite sans tenir compte des corrections déduites de l'étude des quatre positions isolées.

Le calcul des dérivées est le même que pour les positions isolées; il faut songer toutefois qu'en ce qui concerne les dérivées par rapport à m , il s'introduit de nouveaux termes : ils proviennent de ce que la durée de la révolution étant changée, les positions de M. Crommelin, dont il faut prendre la moyenne, ne sont plus les mêmes.

Voici les valeurs numériques de ces dérivées. Je désigne chaque moyenne ou différence de moyenne par le numéro d'ordre déjà utilisé. Je donne les valeurs numériques des dérivées multipliées par πa ; c'est sous cette forme que je les ai le plus commodément calculées. Dans les colonnes qui portent

pour titre ε et γ , j'ai écrit les valeurs numériques de $\pi a \frac{1}{\varepsilon} \frac{dx}{d\varepsilon}$, ..., $\pi a \frac{1}{\gamma} \frac{dx}{d\gamma}$, ...

	$m.$	$\omega.$	$\varepsilon.$	$\gamma.$	$\varpi.$	$\theta.$
1	$x... - 1$	0,00	+1,36	+0,48	+1,52	-0,31
	$y... - 12$	-0,06	-0,86	+0,77	+1,27	+0,50
	$\frac{1}{2}z... 0$	-0,05	-0,25	-0,51	-0,40	+0,34
2	$x... - 36$	-1,68	+1,11	+0,44	+1,68	-0,47
	$y... - 20$	-0,15	-1,08	+0,79	+1,19	+0,61
	$\frac{1}{2}z... + 11$	+0,47	-0,34	-0,49	-0,42	-0,13
3	$x... - 2$	+0,03	+1,44	+0,27	+1,27	-0,52
	$y... + 21$	+0,06	-1,20	+0,92	+0,88	+0,58
	$\frac{1}{2}z... - 1$	+0,02	-0,22	-0,50	-0,34	+0,39
4	$x... - 28$	+0,24	-0,48	-0,80	+0,44	+0,48
	$y... + 3$	+3,44	+0,28	-0,20	+0,36	-0,48
	$\frac{1}{2}z... + 9$	-0,32	+0,20	-0,88	+0,24	-0,08
5	$x... 0$	+0,02	0,00	+0,18	+0,22	+0,34
	$y... - 4$	+0,10	+0,30	-0,18	+0,32	-0,10
	$\frac{1}{2}z... - 4$	-0,02	-0,04	+0,02	-0,06	-0,16

L'examen de ces valeurs montre que les équations déduites de leur seule considération définit assez mal les différentes constantes, parce que les coefficients des accroissements à leur donner sont souvent presque proportionnels. Aussi y a-t-il lieu de calculer les corrections des éléments en tenant compte de toutes les données, positions isolées et moyennes.

Quels poids faut-il donner à chacune de ces combinaisons? Il faudrait, pour le savoir, avoir des données précises sur la périodicité et la valeur moyenne des différents termes négligés à qui j'attribue le désaccord final entre le calcul et l'observation. Je n'ai pas ces données; mais il y a tout lieu de croire que les termes qui s'éliminent au moins partiellement dans la moyenne d'une révolution sont assez nombreux, de même que ceux qui disparaissent dans la différence des moyennes de deux révolutions.

J'ai adopté les poids suivants, en tenant compte des parties communes aux différents intervalles de temps :

Mêmes poids aux x , aux y et aux z .

Poids 1 pour les quatre positions isolées.

Poids 2 pour les combinaisons numérotées (3) et (5) et la combinaison

2(1) — (5), c'est-à-dire, à peu près, poids 3 à la moyenne de deux révolutions successives depuis l'origine des temps.

Poids $\frac{1}{2}$ pour la combinaison (2) et pour la combinaison (4).

Les résultats sont les suivants :

$$\delta m = + 0,000571,$$

$$\delta \omega = + 0,0532,$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \delta \varepsilon = + 0,0429,$$

$$\frac{1}{\gamma} \delta \gamma = - 0,0221,$$

$$\delta \varpi = - 0,0023,$$

$$\delta \theta = + 0,0451,$$

ou encore

$$\delta m = + 0,000571,$$

$$\delta \omega = + 3^{\circ} 3',$$

$$\delta \varepsilon = + 0,00858,$$

$$\delta \gamma = - 0,00586,$$

$$\delta \varpi = - 8',$$

$$\delta \theta = + 2^{\circ} 38',$$

et les résidus deviennent :

	1908	1909	1910	1912					
	janv. 28.	févr. 15.	mars 6.	juin 15.	.		3.	4.	5.
$x \dots$	—0,0012	+0,0031	+0,0018	—0,0038	+0,0009	—0,0006	+0,0008	—0,0005	+0,0013
$y \dots$	—0,0003	+0,0034	—0,0006	—0,0044	—0,0006	+0,0001	+0,0011	+0,0026	—0,0004
$z \dots$	—0,0022	+0,0010	+0,0010	—0,0002	+0,0002	+0,0036	+0,0001	—0,0011	+0,0004

Enfin, si l'on veut corriger a indépendamment de m , on trouve qu'il y a lieu de donner une correction $\frac{da}{a} = - 0,0047$, d'où résulterait pour la masse de Jupiter la valeur $\frac{1}{1062}$ au lieu de $\frac{1}{1047}$. Ce résultat n'est évidemment pas à retenir.

Pour nous rendre compte de la précision des résultats obtenus, il est bon de remarquer qu'une longueur égale à 0,001 avec l'unité que j'ai adoptée, c'est-à-dire le rayon de l'orbite terrestre, est vue normalement du

Soleil à la distance de Jupiter sous un angle de $40''$. D'autre part il suffit de regarder le graphique qui accompagne le dernier Mémoire de M. Crommelin pour constater que la bande elliptique remplie par l'orbite en quelques révolutions a parfois une largeur de $0,030$, et si l'on prend pour quelques dates à 739 jours les unes des autres (durée de la révolution selon l'auteur) les coordonnées x, y, z , on constate que beaucoup d'entre elles s'écartent de $0,020$ de la moyenne.

Le développement analytique n'est donc pas illusoire.

Voici pour conclure les constantes corrigées et les Tableaux des perturbations telles qu'elles résultent de ces nouvelles constantes :

Origine des temps 1908 janvier 28,0 (t. m. P.).

Moyen mouvement $-1744'',90$ par jour.

Durée de la révolution $742^d,74$ (M. Crommelin donne 739 jours).

$$\begin{aligned} a &= 0,15805, & \varepsilon &= +0,2086, & \gamma &= +0,2591, \\ \omega &= +276^\circ 3', & \varpi &= -45^\circ 25' 2, & \theta &= +91^\circ 51' 1, \end{aligned}$$

$$g = -0,00202, \quad h = -0,02313.$$

Le nœud et le périjove accomplissent donc dans le même sens, le premier une révolution en $43,23$ révolutions de VIII Jupiter, soit $4^\circ 5' 42''$ par année terrestre; le second une révolution en $495,1$ révolutions de VIII Jupiter, soit $21' 28''$ par année terrestre :

TABLEAU DES A.

	0, 0.	1, 0.	-1, 0.	2, 0.	-2, 0.
0	+0,84047	-0,16740	+0,59584	+0,04922	+0,04057
2	-0,01545	+0,01171	+0,02776	-0,00664	-0,01552
-2	-0,03031	-0,09332	+0,00354	+0,05544	-0,00091
4	+0,00163	+0,00055	-0,00190	-0,00045	+0,00189
-4	+0,00024	-0,00049	+0,00004	+0,00105	-0,00002
6	+0,00012	+0,00002	-0,00009	-0,00002	-0,00012
-6	0,00000	0,00000	0,00000	-0,00001	0,00000

TABLEAU DES A.

	0, 2.	0, - 2.	3, 0.	- 3, 0.	1, 2.
0	-0,03457	+0,05088	-0,02551	-0,00293	-0,00085
2	-0,00102	-0,00264	-0,00104	+0,00297	-0,00002
-2	-0,00628	-0,00129	-0,01902	-0,00003	-0,01336
4	-0,00003	+0,00015	-0,00003	-0,00100	0,00000
-4	+0,00013	-0,00004	-0,00095	0,00000	-0,00088
6	0,00000	+0,00004	0,00000	+0,00010	0,00000
-6	0,00000	0,00000	+0,00001	0,00000	+0,00001
	- 1, - 2.	- 1, 2.	1, - 2.	4, 0.	- 4, 0.
0	-0,01366	+0,05324	-0,12169	+0,01067	+0,00073
2	+0,00311	+0,00075	-0,00136	+0,00062	+0,00018
-2	-0,00016	+0,03108	+0,00180	+0,00857	+0,00002
4	-0,00088	+0,00001	+0,00004	+0,00002	+0,00015
-4	0,00000	-0,00003	+0,00003	+0,00102	0,00000
6	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	-0,00008
-6	0,00000	0,00000	0,00000	-0,00002	0,00000
	2, 2.	- 2, - 2.	- 2, 2.	2, - 2.	0, 4.
0	+0,00063	+0,00442	+0,01085	+0,01242	0,00000
2	+0,00003	+0,00087	+0,00556	+0,00211	0,00000
-2	+0,00661	+0,00012	+0,00003	-0,00060	+0,00010
4	0,00000	+0,00039	+0,00015	+0,00001	0,00000
-4	+0,00104	0,00000	+0,00001	+0,00011	+0,00013
6	0,00000	-0,00007	+0,00001	0,00000	0,00000
-6	-0,00002	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0, - 4.	1, 0, 0.	- 1, 0, 0.	1, 1, 0.	- 1, - 1, 0.
0	+0,00006	+0,00370	-0,00456	-0,00584	+0,00342
2	+0,00041	+0,00039	-0,00118	0,00000	+0,00201
-2	0,00000	-0,00303	+0,00106	-0,01127	0,00000
4	+0,00014	+0,00002	-0,00011	0,00000	+0,00010
-4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
6	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
-6	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	- 1, 1, 0.	1, - 1, 0.	1, 2, 0.	- 1, - 2, 0.	- 1, 2, 0.
0	+0,00372	+0,00181	+0,00295	+0,00016	-0,00167
2	-0,00020	-0,00121	+0,00004	-0,00174	+0,00016
-2	+0,00615	+0,00020	+0,00704	0,00000	-0,00126
4	0,00000	0,00000	0,00000	+0,00023	0,00000
-4	0,00000	0,00000	+0,00012	0,00000	-0,00002

TABLEAU DES A.

	1, -2, 0.	1, 0, 2.	-1, 0, -2.	-1, 0, 2.	1, 0, -2.
0	-0,00033	+0,00010	-0,00098	+0,00003	+0,00007
2	-0,00081	0,00000	-0,00126	0,00000	+0,00016
-2	0,00000	+0,00322	0,00000	-0,00088	0,00000
4	-0,00015	0,00000	-0,00003	0,00000	0,00000
-4	0,00000	+0,00003	0,00000	-0,00003	0,00000

	2, 0, 0.	-2, 0, 0.
0	-0,00007	+0,00007
2	0,00000	+0,00002
-2	-0,00025	0,00000
4	0,00000	0,00000
-4	0,00000	0,00000

	0, 0.	1, 0.	-1, 0.	2, 0.	-2, 0.
1	+0,00081	-0,00055	-0,00221	+0,00031	+0,00001
-1	+0,00094	+0,00334	-0,00023	-0,00125	+0,00002
3	-0,00019	-0,00003	+0,00018	+0,00003	+0,00026
-3	-0,00016	-0,00072	+0,00005	-0,00183	-0,00001
5	-0,00001	0,00000	+0,00001	0,00000	+0,00002
-5	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

	0, 2.	0, -2.	1, 0, 0.	-1, 0, 0.
1	0,00000	+0,00337	+0,00128	-0,00016
-1	-0,00146	+0,00004	+0,00054	-0,00378
3	0,00000	+0,00021	+0,00001	0,00000
-3	-0,00101	0,00000	-0,00005	0,00000
5	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
-5	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

TABLEAU DES A'.

	0, 1.	1, 1.	1, -1.	2, 1.	2, -1.
0	+0,23658	-0,04688	-0,17343	+0,01725	+0,03722
2	-0,00515	+0,00296	+0,00313	+0,00042	-0,00077
-2	+0,01253	-0,02588	-0,00759	+0,00717	+0,00554
4	-0,00014	+0,00014	-0,00014	+0,00001	-0,00002
-4	-0,00023	+0,00073	+0,00048	-0,00044	-0,00041
6	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
-6	0,00000	-0,00001	0,00000	+0,00002	-0,00001

TABLEAU DES A".

	0, 3.	3, 1.	3, -1.	1, 3.	-1, 3.
0	+0,00022	-0,00650	-0,00778	-0,00021	+0,01371
2	0,00000	-0,00027	+0,00026	0,00000	+0,00019
-2	+0,00501	-0,00037	-0,00452	-0,00298	+0,00607
4	0,00000	-0,00001	+0,00002	+0,00001	0,00000
-4	-0,00016	-0,00001	+0,00035	+0,00018	0,00000
6	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
-6	0,00000	-0,00002	-0,00002	0,00000	0,00000
	1, 0, 1.	-1, 0, 1.	1, 1, 1.	-1, 1, 1.	1, -1, 1.
0	+0,00038	-0,00025	-0,00089	+0,00055	-0,00146
2	0,00000	+0,00013	0,00000	-0,00005	-0,00039
-2	+0,00063	-0,00038	-0,00256	+0,00110	-0,00019
4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
-4	0,00000	0,00000	+0,00003	0,00000	0,00000
	1, 1, -1.		0, 1.	1, 1.	1, -1.
0	-0,00164	1	+0,00032	-0,00017	-0,00156
2	-0,00005	-1	-0,00129	-0,00037	-0,00047
-2	-0,00062	3	+0,00001	-0,00001	+0,00001
4	0,00000	-3	+0,00003	+0,00007	-0,00004
-4	-0,00003				

Voilà les résultats que j'ai pu obtenir, grâce à la simplicité et à l'élégance des formules de M. Andoyer, et grâce à l'introduction dès le début d'une valeur numérique pour le moyen mouvement. Les résultats n'ont pas la précision qu'exigeraient les observations; il n'y a pas à s'en étonner, si l'on songe aux conditions très défavorables dans lesquelles se présente le calcul actuel, et si l'on se rappelle que l'effort considérable de Delaunay pour la Lune s'est montré lui-même insuffisant.

Il paraît raisonnable d'attendre que de nouvelles observations (qu'on ne doit malheureusement prévoir que dans un avenir assez éloigné) permettent de préciser le moyen mouvement et de compléter, s'il y a lieu, par des termes empiriques le Tableau des inégalités du mouvement.

Paris, le 20 janvier 1913.

Vu et approuvé :

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 20 janvier 1913.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.

SECONDE THÈSE.



PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Figure des atmosphères du Soleil et des planètes.

Vu et approuvé :

Paris, le 20 janvier 1913.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 20 janvier 1913.

L. LIARD.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I. — Exposé de la méthode.....	5
CHAPITRE II. — Résultats des calculs.....	20
CHAPITRE III. — Détermination des éléments de l'orbite du huitième satellite de Jupiter.....	40

51454 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS.

Quai des Grands-Augustins, 55.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
51454 Quai des Grands-Augustins, 55
